

BACHELORARBEIT

# Überlagerungen und der kleine Satz von Picard

Mario Günzel  
3015730

Vorgelegt der  
Fakultät für Mathematik der  
Universität Duisburg-Essen

am  
29. September 2017

Betreut von:  
Prof. Dr. Jochen Heinloth

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Topologische Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Wege und Homotopien . . . . .	2
2.2	Die Fundamentalgruppe . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Überlagerungen</b>	<b>10</b>
3.1	Einführung Überlagerungen . . . . .	10
3.2	Beispiele . . . . .	12
3.3	Eigenschaften von Überlagerungen . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Hochhebungen und Deckbewegungen</b>	<b>22</b>
4.1	Hochhebungen . . . . .	22
4.2	Die Deckbewegungsgruppe . . . . .	27
4.3	Zusammenführung . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Der Uniformisierungssatz und weitere Kategorisierung</b>	<b>38</b>
5.1	Der Uniformisierungssatz . . . . .	38
5.2	Die Ebene $\mathbb{C}$ als universelle Überlagerung . . . . .	39
5.3	Die Zahlenkugel $\mathbb{P}$ als universelle Überlagerung . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Eine Anwendung – der kleine Satz von Picard</b>	<b>43</b>
	<b>Literatur</b>	<b>45</b>

# 1 Einführung

Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Abbildung, die alle komplexen Zahlen außer der 0 trifft. Sie lässt also einen Punkt der komplexen Ebene aus. Damit stellt sich uns die Frage: Gibt es auch nicht-konstante, holomorphe Abbildungen von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ , die zwei Punkte auslassen?

Darauf gibt der *kleine Satz von Picard* eine Antwort. Er besagt, dass es keine nicht-konstante, holomorphe Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  gibt. Der Grund dafür ist, dass die Riemannsche Fläche  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  zu viele „Löcher“ besitzt.

Wir werden uns in der vorliegenden Arbeit zunächst damit beschäftigen, wie wir „Löcher“ auf Riemannschen Flächen aus mathematischer Sicht beschreiben können. Auskunft über die „Löcher“ der Fläche gibt uns die *Fundamentalgruppe*, welche wir in Kapitel 2 kennenlernen werden. Wie wir sehen werden, ist es aber nicht so einfach, die Fundamentalgruppe nur mithilfe der Definition zu bestimmen. Wir beschäftigen uns daher mit Überlagerungen von Riemannschen Flächen, welche uns als Hilfsmittel zur Bestimmung der Fundamentalgruppe dienen.

Überlagerungen sind strukturerthaltende Abbildungen, bei denen mehrere ähnlich aussehende Teilstücke eines Raumes übereinander gelegt (sprich überlagert) werden. Wir werden in Kapitel 4 die Existenz einer so genannten *universellen Überlagerung* zu jeder zusammenhängenden Riemannschen Fläche zeigen. Diese spezielle Form der Überlagerung ermöglicht es uns, die Fundamentalgruppe ohne großen Aufwand anzugeben. In den letzten beiden Kapiteln beschäftigen wir uns damit, die universelle Überlagerung von  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  zu finden, um den kleinen Satz von Picard zu beweisen. Es ist erstaunlich, dass dieser Satz aus anfänglich rein topologischen Überlegungen folgt.

Diese Arbeit ist im Anschluss an die Vorlesung Funktionentheorie 1 und dem Seminar zur Funktionentheorie von Herrn Prof. Dr. Heinloth entstanden. Daher werden einige Grundkenntnisse der Funktionentheorie vorausgesetzt, welche unter anderem in der Literatur [1] und [2] nachgelesen werden können. Darüber hinaus werden viele topologische Argumente verwendet, für die ebenfalls ein Grundverständnis vorausgesetzt wird. Die topologische Theorie, die zum Verständnis dieser Arbeit notwendig ist, entnehmen wir dem Werk „Topologie“ ([4]) von Laures.

## 2 Topologische Grundlagen

Wir werden in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe definieren, die uns Aufschluss über die „Löcher“ einer Riemannschen Fläche gibt. Um die „Löcher“ einer Riemannschen Fläche aufzuspüren, werden wir Schleifen auf der Fläche auslegen und prüfen, ob diese beim Zusammenziehen „an einem Loch hängen bleiben“.

Dieses Kapitel ist angelehnt an [5], Kapitel 3.2. Wie auch in der Quelle werden wir zunächst nur topologische Räume betrachten. Die Ergebnisse dieses Kapitels lassen sich aber leicht auf Riemannsche Flächen übertragen, da Riemannsche Flächen insbesondere topologische Räume sind.

### 2.1 Wege und Homotopien

Wir werden uns zunächst damit auseinander setzen, was Schleifen auf einer Riemannschen Fläche sind und wie wir diese mathematisch genau fassen können.

**Definition 2.1 (Wege und Schleifen).** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (i) Wir bezeichnen eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$$

als *Weg* von  $\gamma(0)$  nach  $\gamma(1)$  auf  $X$ . Häufig wird  $\gamma(0)$  auch *Startpunkt* und  $\gamma(1)$  *Endpunkt* des Weges genannt.

- (ii) Ein Weg, bei dem Start- und Endpunkt übereinstimmen, heißt *geschlossen*. Er wird auch *Schleife* genannt.
- (iii) Des Weiteren nennen wir den Raum  $X$  *wegzusammenhängend*, falls zu je zwei Punkten  $a$  und  $b$  aus  $X$  ein Weg von  $a$  nach  $b$  existiert.

Wenn der Endpunkt eines Weges mit dem Startpunkt eines anderen Weges übereinstimmt, so können wir diese beiden Wege zu einem gemeinsamen Weg zusammenfassen. Außerdem können wir Teilwege betrachten, einen Weg „anders herum“ durchlaufen, oder einfach auf einer Stelle stehen bleiben. Diese recht anschaulichen Überlegungen können wir formalisieren.

**Definition 2.2.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (i) Seien  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$  und  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  zwei Wege mit  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ . Wir können eine Verknüpfung von Wegen

$$\begin{aligned} \gamma_1 * \gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & , \text{ für } t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & , \text{ für } t > \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

definieren. Wir nennen diese Verknüpfung auch das *nacheinander Entlanglaufen* der Wege.

- (ii) Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ein beliebiger Weg. Außerdem seien  $a \leq b$  zwei Punkte in  $[0, 1]$ . Wir nennen den Weg  $\gamma^{[a,b]} : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma^{[a,b]}(t) := \gamma(t(b-a) + a)$  Teilweg von  $\gamma$ .
- (iii) Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg, so heißt  $\gamma^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$  für alle  $t$  in  $[0, 1]$  der zu  $\gamma$  umgekehrte Weg.
- (iv) Den Weg  $c_x : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $c_x(t) = x \in X$  für alle  $t$  in  $[0, 1]$  nennen wir den konstanten Weg in  $x$ .

**Lemma 2.3.** *Das nacheinander Entlanglaufen zweier Wege  $\gamma_1 * \gamma_2$  ist selbst wieder ein Weg.*

*Beweis.* Allein im Punkt  $\frac{1}{2}$  ist die Stetigkeit nicht sofort klar. Sei aber  $U$  eine beliebige offene Umgebung um  $\gamma_1 * \gamma_2(\frac{1}{2})$ . Dann ist sie ebenso eine offene Umgebung um  $\gamma_1(1)$  und um  $\gamma_2(0)$ . Wir finden also  $a$  und  $b$  in  $(0, 1)$ , sodass  $\gamma_1((a, 1])$  und  $\gamma_2([0, b])$  in  $U$  enthalten sind. Es ist dann auch  $\gamma_1 * \gamma_2((\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}))$  in  $U$  enthalten.  $\square$

Es sei angemerkt, dass das nacheinander Entlanglaufen  $\gamma^{[0,a]} * \gamma^{[a,1]}$  von Teilwegen zwar wieder ein Weg ist, im Allgemeinen aber nicht dem Weg  $\gamma$  entspricht.

Stellen wir uns nun zwei Wege mit dem gleichen Start- und dem gleichen Endpunkt vor. Wenn die Riemannsche Fläche zwischen den beiden Wegen keine „Löcher“ hat, so können wir sie durch „Ziehen“ oder auch „Wackeln“, wie es in [5] genannt wird, ineinander überführen.

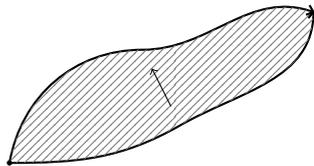


Abbildung 1: „Ziehen“ an einem Weg

Dieses „an den Wegen Wackeln“ lässt sich durch den Begriff der *Homotopie* formalisieren.

**Definition 2.4 (homotop).** Seien  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$  zwei Wege von  $a$  nach  $b$ . Wir nennen die Wege *homotop*, falls eine stetige Abbildung

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

existiert, sodass die Eigenschaften  $h(0, t) = a$ ,  $h(1, t) = b$ ,  $h(s, 0) = \gamma_0(s)$  und  $h(s, 1) = \gamma_1(s)$  für alle  $s$  und  $t$  in  $[0, 1]$  erfüllt sind. Die Abbildung  $h$  wird auch *Homotopie* genannt.

Wir können eine Homotopie auch als Schar von Wegen  $h(\_, t) = \gamma_t(\_)$  auffassen, wobei der Start- und Endpunkt der Wege festgehalten wird. In anderer Literatur wird diese Art der Homotopie daher auch als *gebundene Homotopie* bezeichnet. Der Begriff Homotopie wird in solcher Literatur für eine Abbildung wie oben, nur ohne die Eigenschaften  $h(0, t) = a$  und  $h(1, t) = b$ , verwendet.

Wir haben bereits angemerkt, dass die Wege  $\gamma^{[0,a]} * \gamma^{[a,1]}$  und  $\gamma$  nicht übereinstimmen. Es gilt aber

**Lemma 2.5.** Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg und  $a \in [0, 1]$  beliebig. Der Weg  $\gamma^{[0,a]} * \gamma^{[a,1]}$ , der durch das nacheinander Entlanglaufen der Teilwege  $\gamma^{[0,a]}$  und  $\gamma^{[a,1]}$  entsteht, ist homotop zu  $\gamma$ .

*Beweis.* Wir betrachten dazu die Homotopie

$$h(s, t) := \begin{cases} \gamma(2s((\frac{1}{2} - a)t + a)) & , \text{ für } s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma((2s - 1)(1 - ((\frac{1}{2} - a)t + a)) + ((\frac{1}{2} - a)t + a)) & , \text{ für } s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

zwischen  $\gamma^{[0,1]} * \gamma^{[a,1]}$  und  $\gamma$ . Durch einfaches Nachrechnen erhält man die gewünschten Gleichungen  $h(s, 0) = \gamma^{[0,1]} * \gamma^{[a,1]}(s)$ ,  $h(s, 1) = \gamma(s)$ ,  $h(0, t) = \gamma(0)$  und  $h(1, t) = \gamma(1)$  für alle  $s$  und  $t$  in  $[0, 1]$ .

Wir wollen noch zeigen, dass die Abbildung  $h$  stetig ist. Dazu zerlegen wir die Menge  $[0, 1] \times [0, 1]$  in  $M_1 := \{(s, t) \mid s \leq \frac{1}{2}\}$  und in  $M_2 := \{(s, t) \mid s \geq \frac{1}{2}\}$ . Die Abbildungen  $h|_{M_1}$  und  $h|_{M_2}$  sind als Kompositionen von stetigen Abbildungen stetig. Nicht sofort klar ist die Stetigkeit von  $h$  in den Punkten  $M_1 \cap M_2$ . Wir können sie aber im Folgenden mit einer ähnlichen Herangehensweise wie in Lemma 2.3 begründen. Sei  $(s, t)$  ein beliebiger Punkt im Schnitt  $M_1 \cap M_2$  und sei  $V$  eine beliebige offene Menge um diesen Punkt. Da sowohl  $h|_{M_1}$  als auch  $h|_{M_2}$  stetig ist, können wir eine offene Umgebung  $U_1 := h|_{M_1}^{-1}(V)$  in  $M_1$  und eine offene Umgebung  $U_2 := h|_{M_2}^{-1}(V)$  in  $M_2$  angeben, sodass  $U_1$  und  $U_2$  beide den Punkt  $(s, t)$  enthalten. Da  $M_1$  und  $M_2$  mit der Teilraumtopologie versehen sind, finden wir offene Mengen  $U'_1 \subseteq M_1 \cup M_2$  und  $U'_2 \subseteq M_1 \cup M_2$  mit  $U'_1 \cap M_1 = U_1$  und  $U'_2 \cap M_2 = U_2$ . Der Schnitt der beiden Mengen  $U := U'_1 \cap U'_2 \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$  ist eine offene Umgebung von  $(s, t)$ , für welche  $h(U) \subset V$  gilt. Somit ist  $h$  stetig.  $\square$

**Bemerkung 2.6.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $a$  und  $b$  zwei beliebige Elemente aus  $X$ . Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege von  $a$  nach  $b$ .

*Beweis.* Dies kann man leicht selbst überprüfen. Die Reflexivität ist durch eine in der zweiten Koordinate konstante Homotopie zu begründen. Die für die Symmetrie gebrauchte umgekehrte Homotopie finden wir, indem wir die zweite Koordinate rückwärts durchlaufen. Für die Transitivität betrachten wir eine Homotopie  $h_1$  zwischen zwei Wegen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  von  $a$  nach  $b$  und eine Homotopie  $h_2$  zwischen  $\gamma_1$  und einem weiteren Weg  $\gamma_2$  von  $a$  nach  $b$ . Wir wollen zeigen, dass die Wege  $\gamma_0$  und  $\gamma_2$  homotop sind. Dazu können wir eine Homotopie

$$h : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$(s, t) \longmapsto \begin{cases} h_1(s, 2t) & , \text{ für } t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(s, 2t - 1) & , \text{ für } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

konstruieren, die bis zur Hälfte durch die eine und dann durch die andere Homotopie gegeben ist. Der Beweis der Stetigkeit kann analog zum Stetigkeitsbeweis von  $h$  in Lemma 2.5 geführt werden.  $\square$

Wir können die Menge aller Wege von  $a$  nach  $b$  entsprechend der gerade gefundenen Äquivalenzrelation in Äquivalenzklassen einteilen. Dies bringt uns zu der folgenden

**Definition 2.7.** Die Menge aller Homotopieklassen von Wegen von  $a$  nach  $b$  auf  $X$  wird mit  $\pi_1(X, a, b)$  bezeichnet.

Wenn wir noch annehmen, dass die Punkte  $a$  und  $b$  übereinstimmen, so können wir die Repräsentanten der Homotopieklassen durch das nacheinander Entlanglaufen miteinander Verknüpfen. Die Wege, bei denen die Start- und Endpunkte übereinstimmen, sind genau die Schleifen. Wie wir sehen werden, gibt dies der Homotopieklassse von Schleifen mit einem festen Startpunkt die Struktur einer Gruppe. Dazu beweisen wir zunächst das folgende Hilfslemma.

**Lemma 2.8.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $a, b, c \in X$  beliebige Punkte dieses Raumes. Die Abbildung  $*' : \pi_1(X, a, b) \times \pi_1(X, b, c) \rightarrow \pi_1(X, a, c)$  mit  $*'([\gamma_1], [\gamma_2]) = [\gamma_1 * \gamma_2]$  ist eine wohldefinierte Abbildung, also insbesondere repräsentantenunabhängig. Hierbei entspricht  $*$  dem nacheinander Entlanglaufen der Wege.

*Beweis.* Seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_1'$  zwei homotope Wege von  $a$  nach  $b$ . Außerdem seien  $\gamma_2$  und  $\gamma_2'$  zwei homotope Wege von  $b$  nach  $c$ . Wir müssen zeigen, dass  $\gamma_1 * \gamma_2$  und  $\gamma_1' * \gamma_2'$  homotop sind.

Dazu definieren wir die zu  $\gamma_1$  und  $\gamma_1'$  gehörige Homotopie als  $h_1$  und die zu  $\gamma_2$  und  $\gamma_2'$  gehörige Homotopie als  $h_2$ . Wir konstruieren eine Homotopie

$$h(s, t) := \begin{cases} h_1(2s, t) & , \text{ für } s \leq \frac{1}{2} \\ h_2(2s - 1, t) & , \text{ für } s > \frac{1}{2} \end{cases}$$

zwischen den Wegen  $\gamma_1 * \gamma_2$  und  $\gamma_1' * \gamma_2'$ . Dies ist wirklich eine Homotopie zwischen den beiden Wegen, denn es gilt  $h(0, t) = a$ ,  $h(1, t) = c$ ,  $h(s, 0) = \gamma_1 * \gamma_2$  und  $h(s, 1) = \gamma_1' * \gamma_2'$ . Außerdem ist die Homotopie  $h$  stetig. Der Beweis dazu ist analog zum Stetigkeitsbeweis der Abbildung  $h$  in Lemma 2.5.  $\square$

Wir werden die soeben eingeführte Abbildung  $*'$  im Folgenden ebenfalls als das nacheinander Entlanglaufen von Wegen  $*$  bezeichnen.

**Proposition 2.9.** Die Homotopieklassen  $\pi_1(X, a, a)$  von Schleifen mit einem festen Startpunkt bilden eine Gruppe bezüglich des nacheinander Entlanglaufens von Wegen.

*Beweis.* Wir wissen bereits aufgrund von Lemma 2.8, dass das nacheinander Entlanglaufen von Wegen auf  $\pi_1(X, a, a)$  eine wohldefinierte Verknüpfung ist.

Als nächstes zeigen wir, dass die definierte Verknüpfung assoziativ ist. Seien also drei Wege  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow X$  gegeben. Wir behaupten, dass  $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$  und  $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$  homotop sind. Die Abbildung

$$h(s, t) := \begin{cases} \gamma_1(2(2-t)s) & , \text{ für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2(2-t)} \\ \gamma_2\left(\left(s - \frac{1}{2(2-t)}\right) \frac{2(2-t)(1+t)}{1+2t-2t^2}\right) & , \text{ für } \frac{1}{2(2-t)} \leq s \leq 1 - \frac{1}{2(1+t)} \\ \gamma_3\left(2(1+t)\left(s - 1 + \frac{1}{2(1+t)}\right)\right) & , \text{ für } 1 - \frac{1}{2(1+t)} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

ist wohldefiniert, da für alle  $(s, t)$  mit  $s = \frac{1}{2(2-t)}$  oder  $s = 1 - \frac{1}{2(1+t)}$  beide möglichen Fälle zu demselben Ergebnis  $h(s, t)$  führen. Die Abbildung  $h$  ist eine Homotopie zwischen den Wegen  $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$  und  $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ , denn durch einfaches Nachrechnen erhalten wir die gewünschten Gleichungen  $h(0, t) = a$ ,  $h(1, t) = a$ ,  $h(s, 0) = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3(s)$  und  $h(s, 1) = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)(s)$ .

Nicht sofort klar ist die Stetigkeit der Abbildung  $h$ . Dazu teilen wir die Menge  $[0, 1] \times [0, 1]$  in

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{ (s, t) \mid 0 \leq s \leq \frac{1}{2(2-t)} \right\}, \\ M_2 &:= \left\{ (s, t) \mid \frac{1}{2(2-t)} \leq s \leq 1 - \frac{1}{2(1+t)} \right\} \text{ und} \\ M_3 &:= \left\{ (s, t) \mid 1 - \frac{1}{2(1+t)} \leq s \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

auf. Auf den einzelnen  $M_i$  ist die Stetigkeit der Abbildung  $h|_{M_i}$  als Komposition von stetigen Abbildungen klar. Wir müssen noch die Stetigkeit der Abbildung  $h$  an den Übergangsstellen  $M_1 \cap M_2$  und  $M_2 \cap M_3$  prüfen. Wir argumentieren dazu einfach analog wie in Lemma 2.5 und führen das deshalb hier nicht erneut an.

Das neutrale Element der Gruppe  $\pi_1(X, a, a)$  ist die Homotopieklasse des konstanten Weges  $c_a$ . Um dies zu zeigen, sei zunächst  $\gamma$  eine beliebige Schleife in  $X$  mit Start- und Endpunkt  $a$ . Da  $\gamma^{[0,0]} = \gamma^{[1,1]} = c_a$  eine Teilweg von  $\gamma$  ist, können wir das Lemma 2.5 anwenden. Es folgt, dass die Homotopieklassen von  $\gamma * c_a$ ,  $c_a * \gamma$  und  $\gamma$  übereinstimmen.

Das Inverse Element zu  $[\gamma] \in \pi_1(X, a, a)$  ist die Homotopieklasse  $[\gamma^{-1}]$  des umgekehrten Weges. Dies folgt sofort, da wir eine Homotopie

$$h(s, t) := \begin{cases} \gamma(2st) & , \text{ für } s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma((2-2s)t) & , \text{ für } s > \frac{1}{2} \end{cases}$$

zwischen  $c_a$  und  $\gamma * \gamma^{-1}$  angeben können. Diese Abbildung ist stetig. Um dies zu zeigen, können wir wieder analog wie in dem Lemma 2.5 vorgehen.  $\square$

## 2.2 Die Fundamentalgruppe

Bisher wissen wir was Schleifen sind und was es bedeutet, diese Schleifen zu dem konstanten Weg „zusammen zu ziehen“. Wir wollen im Folgenden die Menge aller Schleifen betrachten. Dabei sollen aber die Schleifen, die „in gleicher Weise an den Löchern hängen bleiben“, zusammengefasst werden. Für eine wegzusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  leistet die Gruppe  $\pi_1(X, a, a)$ , die wir im letzten Unterkapitel kennengelernt haben, genau dies. Sie enthält alle Schleifen, aber fasst alle Wege zusammen, die homotop sind.

**Definition 2.10 (Fundamentalgruppe).** Wir nennen

$$\pi_1(X, a) := \pi_1(X, a, a)$$

die *Fundamentalgruppe* von  $X$  mit Basispunkt  $a$ .

Bereits in Proposition 2.9 haben wir gezeigt, dass die Fundamentalgruppe eine Gruppe ist. Interessanterweise ist es für die Beschaffenheit der Gruppe irrelevant, auf welchen Basispunkt wir uns beziehen, wie wir in der folgenden Proposition sehen werden.

**Proposition 2.11.** *Sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum und seien  $a \neq b \in X$  zwei Elemente. Dann sind die Fundamentalgruppen  $\pi_1(X, a)$  und  $\pi_1(X, b)$  isomorph zueinander.*

*Beweis.* Sei  $\eta$  ein Weg von  $a$  nach  $b$ . Wir definieren die Abbildung

$$\zeta := ([\gamma] \mapsto [\eta * \gamma * \eta^{-1}]) : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b),$$

wobei  $*$  das nacheinander Entlanglaufen der Wege ist. Diese Abbildung ist aufgrund von Lemma 2.8 repräsentantenunabhängig, also wohldefiniert.

Die Abbildung  $\zeta$  ist ein Homomorphismus, wie uns die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \zeta([\gamma_1 * \gamma_2]) &= [\eta * \gamma_1 * \gamma_2 * \eta^{-1}] \\ &= ([\eta * \gamma_1 * \eta^{-1}]) * ([\eta * \gamma_2 * \eta^{-1}]) \\ &= \zeta([\gamma_1]) * \zeta([\gamma_2]) \end{aligned}$$

zeigt. Bei der zweiten Gleichheit haben wir das neutrale Element  $[\eta^{-1} * \eta] = [c_b]$  eingefügt. Bisher haben wir gezeigt, dass  $\zeta$  ein Gruppenhomomorphismus ist.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Abbildung  $\zeta$  auch bijektiv ist. Dies folgt sofort, da wir eine Umkehrabbildung  $\zeta^{-1} := ([\gamma] \mapsto [\eta^{-1} * \gamma * \eta])$  konstruieren können. Analog wie für die Abbildung  $\zeta$  sieht man, dass auch die Umkehrabbildung  $\zeta^{-1}$  ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist.  $\square$

Die Fundamentalgruppe gibt uns Aufschluss darüber, ob eine Riemannsche Fläche „Löcher“ besitzt. Besonders interessant sind die Riemannschen Flächen mit einer trivialen Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, a) = \{\text{id}\}$ . Wir nennen diese Riemannschen Flächen *einfach zusammenhängend*.

**Definition 2.12 (einfach zusammenhängend).** Sei  $X$  ein wegzusammenhängender, topologischer Raum. Wir nennen  $X$  *einfach zusammenhängend*, falls

$$\pi_1(X, a) = \{\text{id}\}$$

für ein  $a \in X$  gilt.

Die Definition bedeutet kurz gesagt, dass jede Schleife auf dem topologischen Raum homotop zum konstanten Weg ist. Naiv kann man sich unter einem einfach zusammenhängenden Raum einen Raum ohne „Löcher“ vorstellen. Wenn wir zum Beispiel einen sternförmigen Raum  $X \subseteq \mathbb{C}$  betrachten, dann ist  $X$  einfach zusammenhängend ([5], Proposition 3.12). Wir wissen damit bereits, dass die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend ist. Nicht sofort klar ist dies für den projektiven Raum  $\mathbb{P}$ , bei dem noch ein Punkt hinzukommt.

Wir wollen im Folgenden untersuchen, ob auch  $\mathbb{P}$  einfach zusammenhängend ist, indem wir versuchen, so an einem beliebigen Weg zu ziehen, dass er nur noch auf der Ebene  $\mathbb{C}$  verläuft. Dort können wir den Weg dann zusammenziehen, da  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend ist. Zunächst werden wir dazu den Weg in Stücke zerteilen und die Teilwege durch den Punkt  $\infty = 0_-$  gesondert betrachten.

**Proposition 2.13.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg. Wenn wir nun eine offene Überdeckung  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  wählen, dann finden wir eine Zerlegung  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ , sodass zu jedem  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  ein  $i \in I$  existiert mit  $\gamma([s_j, s_{j+1}]) \subseteq U_i$ .

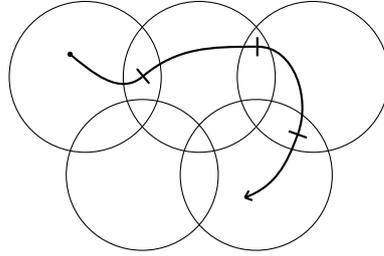


Abbildung 2: Die Zerlegung eines Weges

*Beweis.* Zunächst wählen wir zu jedem Punkt  $\gamma(t)$  mit  $t \in [0, 1]$  auf dem Weg  $\gamma$  eine der offenen Umgebungen  $U_i$  aus, die den Punkt  $\gamma(t)$  enthält. Wir bezeichnen diese Umgebung mit  $U^t$ . Da  $\gamma$  eine stetige Abbildung ist, sind die Urbilder  $\gamma^{-1}(U^t)$  wieder offen. Wir können also zu jedem  $t \in [0, 1]$  ein  $\varepsilon_t > 0$  finden, sodass die Menge

$$V_t := (t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \cap [0, 1]$$

in  $\gamma^{-1}(U^t)$  enthalten ist. Wir haben eine Überdeckung  $[0, 1] = \bigcup_{t \in [0, 1]} V_t$  gefunden. Insbesondere ist auch  $[0, 1] = \bigcup_{t \in [0, 1]} \tilde{V}_t$  mit  $\tilde{V}_t = (t - \frac{\varepsilon_t}{2}, t + \frac{\varepsilon_t}{2})$  eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Da der Raum  $[0, 1]$  kompakt ist, finden wir eine endliche Teilüberdeckung

$$[0, 1] = \bigcup_{k=1}^m \tilde{V}_{t_k}.$$

Wir wählen  $t_0 := \min \{ \frac{\varepsilon_{t_k}}{2} \mid k = 1, \dots, m \}$ . Dann können wir im Folgenden zeigen, dass jedes Intervall  $[a, a + t_0] \subseteq [0, 1]$  der Länge  $t_0$  ganz in einem  $V_{t_k}$  enthalten ist. Der Punkt  $a \in [0, 1]$  ist in einem  $\tilde{V}_{t_k}$  mit  $k \in \{1, \dots, m\}$  enthalten. Es gilt dann auch die Abschätzung

$$a + t_0 < t_k + \frac{\varepsilon_{t_k}}{2} + t_0 \leq t + \frac{\varepsilon_{t_k}}{2} + \frac{\varepsilon_{t_k}}{2} = t_k + \varepsilon_{t_k}.$$

Damit sind  $a$  und  $a + t_0$ , also auch  $[a, a + t_0]$ , in  $V_{t_k}$  enthalten. Wir können eine Zerlegung

$$s_0 := 0 < s_1 := t_0 < s_2 := 2t_0 < \dots < s_{n-1} := (n-1)t_0 < s_n := 1$$

angeben, sodass jedes Intervall  $[s_j, s_{j+1}]$  eine Länge von höchstens  $t_0$  hat. Damit ist das Bild  $\gamma([s_j, s_{j+1}])$  jedes Intervalls in einem der  $U_i$  enthalten. Wir haben die gesuchte Zerlegung gefunden.  $\square$

Mithilfe dieser Proposition können wir sehr einfach zeigen, dass die Riemannsche Fläche  $\mathbb{P}$  einfach zusammenhängend ist.

**Proposition 2.14.** *Die Riemannsche Zahlenkugel  $\mathbb{P}$  ist einfach zusammenhängend.*

*Beweis.* Wir betrachten im Folgenden die Riemannsche Zahlenkugel

$$\mathbb{P} = \mathbb{C}_+ \amalg \mathbb{C}_- / \sim$$

als die disjunkte Vereinigung von zwei Kopien der komplexen Zahlenebene, wobei wir  $z_+$  und  $(\frac{1}{z})_-$  miteinander identifizieren. Sei nun  $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{P}, 0_+)$  die Äquivalenzklasse einer Schleife  $\gamma$ .

1. Fall: Der Weg  $\gamma$  trifft den Punkt  $0_- \in \mathbb{C}_-$  nicht.

Es gilt dann, dass der Weg  $\gamma$  ganz auf  $\mathbb{C}_+$  liegt. Die komplexe Zahlenebene  $\mathbb{C}$  ist aber sternförmig und damit einfach zusammenhängend. Also ist  $\gamma$  homotop zum konstanten Weg  $c_{0_+}$ .

2. Fall: Der Punkt  $0_- \in \mathbb{C}_-$  wird von dem Weg  $\gamma$  getroffen.

Wir wählen eine kleine Kreisscheibe  $B_\varepsilon(0_-)$  um  $0_-$  und erhalten eine Überdeckung  $\mathbb{P} = \mathbb{C}_+ \cup B_\varepsilon(0_-)$  der Riemannschen Zahlenkugel. Wir können den Weg  $\gamma$  mithilfe von Proposition 2.13 in Teilwege  $\gamma^{[s_i, s_{i+1}]} =: \gamma_i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  zerlegen. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, dass die Start- und Endpunkte der Teilwege  $\gamma_i$  verschieden von dem Punkt  $0_-$  sind. Andernfalls können wir den Teilweg  $\gamma_i$  mit Endpunkt  $0_-$  mit dem nachfolgenden Teilweg  $\gamma_{i+1}$  durch das nacheinander Entlanglaufen verknüpfen. Aufgrund von Lemma 2.5 gilt  $[\gamma] = [\gamma_1 * \dots * \gamma_n]$ . Wir betrachten nun nacheinander alle Wege  $\gamma_i$ . Wenn  $\gamma_i$  den Punkt  $0_-$  nicht trifft, dann definieren wir  $\tilde{\gamma}_i$  als  $\gamma_i$ . Falls aber  $\gamma_i$  den Punkt  $0_-$  trifft, dann wählen wir einen beliebigen Weg  $\tilde{\gamma}_i$  in  $B_\varepsilon(0_-) - \{0_-\}$  mit demselben Start- und demselben Endpunkt wie  $\gamma_i$ . Dies können wir machen, da die punktierte Kreisscheibe  $B_\varepsilon(0_-) - \{0_-\}$  wegzusammenhängend ist. Da  $B_\varepsilon(0_-)$  einfach zusammenhängend ist, sind  $\gamma_i$  und  $\tilde{\gamma}_i$  homotop. Es gilt nämlich

$$[\gamma_i] = [\gamma_i] * [\gamma_i^{-1} * \tilde{\gamma}_i] = [\gamma_i * \gamma_i^{-1} * \tilde{\gamma}_i] = [\tilde{\gamma}_i].$$

Der Weg  $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_1 * \dots * \tilde{\gamma}_n$  ist eine Schleife auf  $\mathbb{P} - \{0_-\} = \mathbb{C}$  und damit homotop zum konstanten Weg  $c_{0_+}$ . Außerdem gilt

$$[\gamma] = [\gamma_1 * \dots * \gamma_n] = [\tilde{\gamma}_1 * \gamma_2 \dots * \gamma_n] = \dots = [\tilde{\gamma}_1 * \dots * \tilde{\gamma}_n] = [\tilde{\gamma}].$$

Damit sind auch  $\gamma$  und  $c_{0_+}$  homotop zueinander. □

### 3 Überlagerungen

Im letzten Kapitel haben wir gelernt, was die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes ist. Um diese Gruppe nur mithilfe der Definition zu bestimmen, müssten wir alle Schleifen auf dem Raum betrachten und zu je zwei Schleifen auf dem Raum prüfen, ob wir eine Homotopie zwischen ihnen finden können. Das ist in den meisten Fällen nur sehr schwer umsetzbar. Wir wollen im Folgenden die Fundamentalgruppe von Riemannschen Flächen bestimmen. Hier stehen uns *Überlagerungen* von Riemannschen Flächen als Hilfsmittel zur Bestimmung der Fundamentalgruppe zur Verfügung. Dieser Abschnitt und seine Notationen sind sehr stark an das Kapitel 3.1 der Quelle [5] angelehnt.

Wir werden im Folgenden die Definition einer Riemannschen Fläche nicht wiederholen, halten uns aber an die Notation  $(U, \varphi)$  einer Karte auf einer Riemannschen Fläche  $X$ . Hierbei ist  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge der Riemannschen Fläche und  $\varphi : U \rightarrow V$  eine homöomorphe Abbildung auf eine offene Teilmenge  $V$  von  $\mathbb{C}$ . Die exakte Definition einer Riemannschen Fläche finden wir zum Beispiel in Kapitel I.1 des Buches [3].

#### 3.1 Einführung Überlagerungen

Auch wenn Überlagerungen aus Forschungen in der Funktionentheorie entstanden sind und in verschiedenen Bereichen der Mathematik Anwendung finden, so sind sie doch ein rein topologisches Konzept. Sie können daher auf topologischen Räumen definiert werden, wie es auch in [3] umgesetzt wird. Wir werden uns in dieser Arbeit mit Überlagerungen von Riemannschen Flächen auseinandersetzen. Dies hat den Vorteil, dass wir die Ergebnisse dieses Kapitels sofort auf holomorphe Abbildungen anwenden können.

Wie in der Einführung bereits beschrieben, sind Überlagerungen strukturerhaltende Abbildungen, die ähnlich aussehende Teilstücke eines Raumes übereinander legen oder auch überlagern. Bildlich kann man sich eine Überlagerung zum Beispiel als das Zusammenrollen eines unendlich langen Maßbandes vorstellen. Jedes Zentimeterstück wird über die anderen gelegt und man erhält eine Röhre.

Wir haben bereits in der Vorlesung zur Funktionentheorie Beispiele für Überlagerungen gesehen: Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , die Quadratur der punktierten Ebene  $()^2 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  und auch die Projektion  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  auf einen Torus sind lokal biholomorph, aber nicht global. Dieses Phänomen können wir durch den Begriff *Überlagerung* formalisieren.

**Definition 3.1 (verzweigte und unverzweigte Überlagerungen).** Eine surjektive, holomorphe Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Riemannschen Flächen heißt *Überlagerung*, wenn für alle Punkte  $y \in Y$  und alle Elemente aus der Faser  $f^{-1}(y) = \{x_i \mid i \in I\}$  Kartenumgebungen  $(V, h)$  von  $y$  und  $(U_i, g_i)$  von  $x_i$  existieren, sodass das Urbild von  $V$

$$f^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{i \in I} U_i$$

die disjunkte Vereinigung der  $U_i$  mit  $f(U_i) = V$  ist. Außerdem muss die Abbildung  $f$  in den Karten die Darstellung

$$h \circ f \circ g_i^{-1} : g_i(U_i) \longrightarrow h(V) \quad (3.1)$$

$$z \longmapsto z^{n_i}$$

mit einem  $n_i \in \mathbb{N}$  haben. Wenn zu jedem Punkt  $y \in Y$  und jedem Urbildpunkt  $x_i$  aus der Faser der Exponent  $n_i = 1$  möglich ist, so heißt  $f$  *unverzweigte Überlagerung*. Andernfalls nennen wir die Abbildung *verzweigte Überlagerung*.

Es sei noch angemerkt, dass die Indexmenge  $I$  aus der Definition der Überlagerung im Allgemeinen nicht endlich sein muss. Die folgenden Darstellungen zeigen, wie wir uns verzweigte und unverzweigte Überlagerungen vorstellen können.

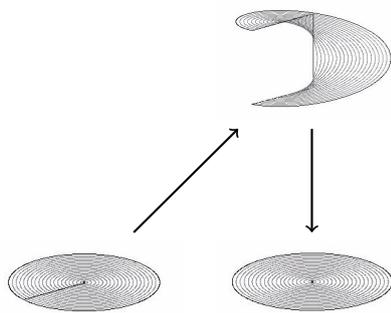


Abbildung 3:  $z \mapsto z^1$

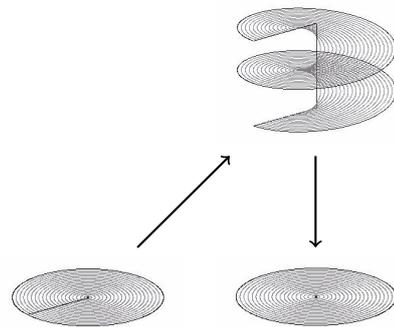


Abbildung 4:  $z \mapsto z^2$

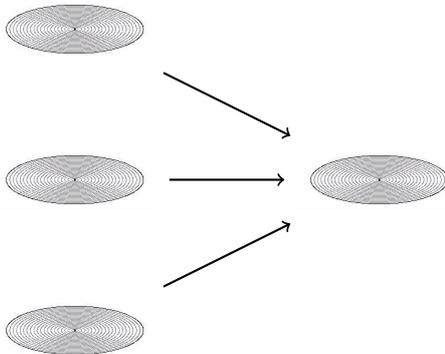


Abbildung 5: Unverzweigte Überlagerung

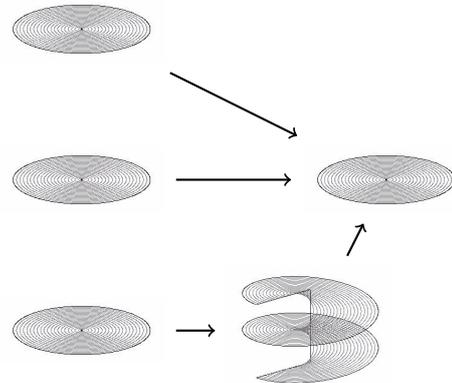


Abbildung 6: Verzweigte Überlagerung

Unverzweigte Überlagerungen  $f : X \rightarrow Y$  sind lokal biholomorph, da wir für ein beliebiges  $x \in X$  Karten  $(U, g)$  um  $x$  und  $(V, h)$  um  $y$  finden können, sodass  $h \circ f \circ g^{-1} = \text{id}$  gilt (vgl. (3.1) mit  $n_i = 1$ ).

Auf den topologischen Räumen gibt es ein Analogon der unverzweigten Überlagerung. Dabei wird eine unverzweigte Überlagerung auf topologischen Räumen in den meisten Publikationen einfach Überlagerung genannt. Dies kann schnell zu

Verwirrung führen, sobald man den Begriff auf die Riemannschen Flächen überträgt. Zur Definition der unverzweigten Überlagerungen auf topologischen Räumen können wir auf [3], Kapitel III.5 verweisen. Die verzweigten Überlagerungen können hingegen nur auf Riemannschen Flächen definiert werden.

Da wir sowohl unverzweigte als auch verzweigte Überlagerungen betrachten, fällt ein größeres Spektrum von Abbildungen unter den Begriff Überlagerung. So sind zum Beispiel alle nicht-konstanten, holomorphen Abbildungen zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen Überlagerungen, wie wir in Korollar 3.6 zeigen werden.

Das  $n_i$  aus der Definition 3.1 der Überlagerung muss nicht eindeutig sein. Um die verzweigten und unverzweigten Überlagerungen besser unterscheiden zu können, ist es uns aber möglich das  $n_i$  zu einem  $x_i \in X$  eindeutig zu machen, indem wir nur die Karten  $g_i$  betrachten, die  $x_i$  auf 0 schicken.

**Proposition 3.2.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine surjektive, holomorphe Abbildung zwischen zwei Riemannschen Flächen und zwei Punkte  $y \in Y$  und  $x_i \in f^{-1}(y)$  beliebig. Außerdem seien  $(U_i, g_i)$  und  $(V, h)$  zwei Karten mit  $U_i \ni x_i$ ,  $V \ni y$  und  $f(U_i) = V$ , für die*

$$h \circ f \circ g_i^{-1}(z) = z^{n_i}$$

*gilt. Seien darüber hinaus  $(\tilde{U}_i, \tilde{g}_i)$  und  $(\tilde{V}, \tilde{h})$  zwei weitere Karten mit  $\tilde{U}_i \ni x_i$ ,  $\tilde{V} \ni y$  und  $f(\tilde{U}_i) = \tilde{V}$ , sodass*

$$\tilde{h} \circ f \circ \tilde{g}_i^{-1}(z) = z^{\tilde{n}_i}$$

*erfüllt ist. Es gilt außerdem  $g_i(x_i) = 0$  und  $\tilde{g}_i(x_i) = 0$ . Dann stimmen  $n_i$  und  $\tilde{n}_i$  überein.*

*Beweis.* Wir wissen, dass die Gleichheit

$$\begin{aligned} (h \circ \tilde{h}^{-1}) \circ ( )^{\tilde{n}_i} \circ (\tilde{g}_i \circ g_i^{-1}) &= (h \circ \tilde{h}^{-1}) \circ \tilde{h} \circ f \circ \tilde{g}_i^{-1} \circ (\tilde{g}_i \circ g_i^{-1}) \\ &= h \circ f \circ g_i^{-1} = ( )^{n_i} \end{aligned}$$

gilt. Auf einer kleinen punktierten Kreisscheibe  $B_\varepsilon(0) - \{0\}$  ist die Anzahl der Urbilder dieser Abbildung konstant. Da aber die beiden Verknüpfungen  $h \circ \tilde{h}^{-1}$  und  $\tilde{g}_i \circ g_i^{-1}$  biholomorph sind, müssen die Exponenten  $n_i$  und  $\tilde{n}_i$  übereinstimmen, um die gleiche Anzahl der Urbildpunkte zu gewährleisten.  $\square$

## 3.2 Beispiele

Nachdem wir soeben gelernt haben, was eine Überlagerung ist, können wir prüfen, ob die am Anfang des letzten Unterkapitels genannten Beispiele wirklich Überlagerungen sind.

Zunächst betrachten wir die **Exponentialfunktion**  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Zur besseren Unterscheidung definieren wir den Definitionsbereich als  $X := \mathbb{C}$  und den Wertebereich als  $Y := \mathbb{C}^*$ . Sei  $y := e^{\tilde{x}}$  ein beliebiges Element aus dem Wertebereich  $Y$  und sei außerdem  $x^{(k)} := \tilde{x} + 2\pi i k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  ein beliebiges Element aus der Faser  $\exp^{-1}(y)$ .

Wir geben einen Atlas von  $X$  an, indem wir zu jedem Wert  $x \in X$  aus dem Definitionsbereich eine geeignete Karte  $(U_x, \varphi_x)$  zur Hand nehmen, wobei die Menge  $U_x$  als

$$U_x := \mathbb{R} + i(\operatorname{Im}(x) - \pi, \operatorname{Im}(x) + \pi)$$

definiert ist und die Abbildung

$$\varphi_x : U_x \xrightarrow{\exp} V_x = \mathbb{C}^* - (\mathbb{R}^+ \cdot e^{i(\operatorname{Im}(x) - \pi)})$$

der Einschränkung der Exponentialfunktion entspricht.

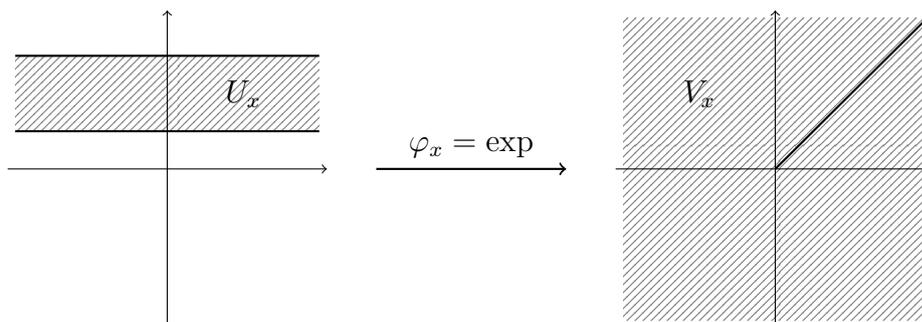


Abbildung 7: Die Exponentialfunktion auf einem Teilgebiet von  $\mathbb{C}$

Wir brauchen noch einen Atlas von  $Y$ . Dazu wählen wir als einzige Karte die Identität  $(Y, \operatorname{id})$ . Die Abbildung  $\exp$  in den Karten kann durch

$$\begin{array}{ccc} U_{x^{(k)}} & \xrightarrow{\exp} & V_{\tilde{x}} \\ \varphi_{x^{(k)}} \downarrow & & \downarrow \operatorname{id} \\ V_{x^{(k)}} & & V_{\tilde{x}} \end{array}$$

verdeutlicht werden. Hierbei sind die Abbildungen von oben nach unten die Kartenabbildungen und die Abbildung von links nach rechts ist die zu untersuchende Abbildung. Wir werden diese Notation für die restlichen Beispiele beibehalten.

Die Verknüpfung  $\operatorname{id} \circ \exp \circ \varphi_{x^{(k)}}^{-1}$  entspricht der Identität. Also ist die Exponentialfunktion eine unverzweigte Überlagerung, da die Identität der Abbildung  $(z \mapsto z^1)$  entspricht.

Unser nächstes Beispiel ist die **Quadratur**  $()^2 : X := \mathbb{C}^* \rightarrow Y := \mathbb{C}^*$  der punktierten Ebene. Wir wählen zunächst einen Atlas der Wertemenge, bestehend aus der Überdeckung  $X = \bigcup_{i=1}^4 U_i$  mit den offenen Mengen

$$U_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

$$U_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$$

$$U_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

$$U_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

und den Karten

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow V_i = \varphi_i(U_i) \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Hierbei sind  $V_1 = V_2 = \mathbb{C}^* - \mathbb{R}^+$  und  $V_3 = V_4 = \mathbb{C}^* - \mathbb{R}^-$  die Bildmengen der Kartenabbildungen  $\varphi_i$ .

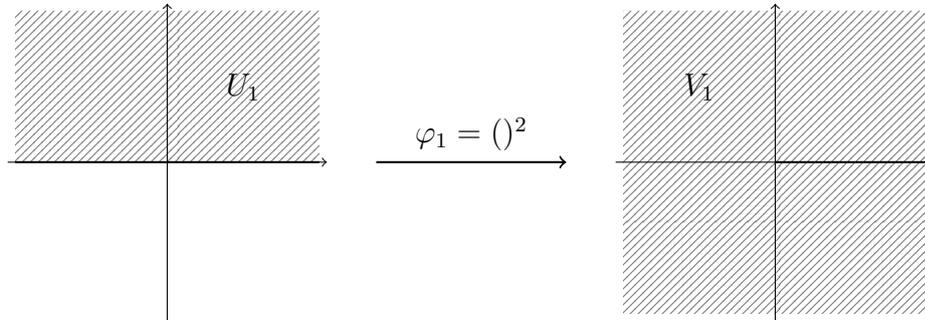


Abbildung 8: Die Quadratur auf  $U_1$

Wenn wir nun ein beliebiges Element  $y = x^2$  aus dem Wertebereich  $Y$  betrachten, dann besteht das Urbild aus den Elementen  $x$  und  $-x$ . An dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{(\ )^2} & V_i \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ V_i & & V_i \end{array}$$

kann man leicht erkennen, dass die Verknüpfung  $\text{id} \circ (\ )^2 \circ \varphi_i^{-1}$  der Identität entspricht, da  $\varphi_i^{-1}$  eine lokal inverse Abbildung zu  $(\ )^2$  ist. Die Quadratur  $(\ )^2$  auf  $\mathbb{C}^*$  ist also eine unverzweigte Überlagerung. Wenn wir den Punkt 0 dazu nehmen und die Quadratur  $(\ )^2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  auf ganz  $\mathbb{C}$  betrachten, so erhalten wir eine verzweigte Überlagerung. Dies sehen wir leicht, indem wir zu dem Punkt 0 die Karte  $(\mathbb{C}, \text{id})$  wählen.

Analog können wir natürlich weitere sehr **trivialen Beispiele**

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

mit  $n \in \mathbb{N}$  betrachten. Hier ergeben sich im Punkt 0 beliebig stark verzweigte Überlagerungen. Sobald wir den Punkt 0 entfernen und die Abbildung auf der punktierten Ebene betrachten, erhalten wir eine unverzweigte Überlagerung.

Als letztes Beispiel betrachten wir die **Projektion**

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda \\ z &\longmapsto [z] = z + \Lambda \end{aligned}$$

**auf einen Torus.** Sei dazu  $\Lambda = w_1 \mathbb{Z} + w_2 \mathbb{Z}$  das gegebene Gitter. Zunächst wählen wir eine Umgebung

$$M_0 := \{t_1 w_1 + t_2 w_2 \mid -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\}$$

um den Punkt 0 und verschieben diese dann zu eine Umgebung

$$M_z := M_0 + z$$

um einen beliebigen Punkt  $z \in \mathbb{C}$ . Zusammen mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_z : M_z &\longrightarrow M_0 \\ x &\longmapsto x - z \end{aligned}$$

erhalten wir eine Karte  $(M_z, \varphi_z)$  zu  $z \in \mathbb{C}$ .

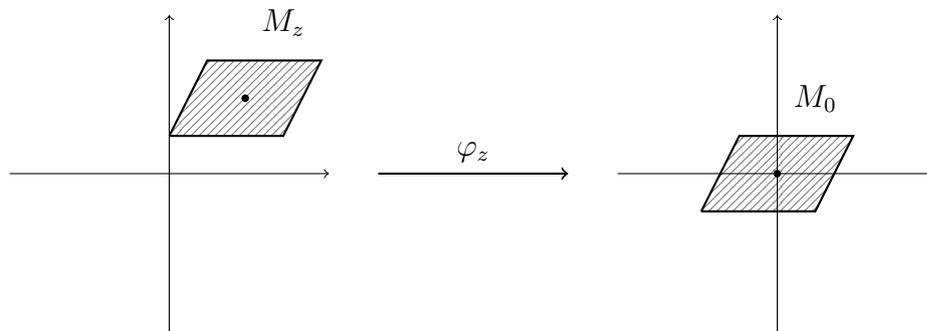


Abbildung 9: Die Verschiebung auf den Ursprung

Auf diese Weise können wir einen Atlas  $(M_z, \varphi_z)_{z \in \mathbb{C}}$  der Definitionsmenge  $\mathbb{C}$  konstruieren. Betrachten wir die Urbilder

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(z) &= z + \Lambda \\ \pi^{-1}(M_z) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_z + \lambda \end{aligned}$$

von  $z$  und  $M_z$ , so fällt auf, dass die soeben konstruierte Abbildung schon einige Kriterien der Überlagerungsdefinition erfüllt. Nun definieren wir Karten

$$\eta_z : [M_z] = M_z + \Lambda \longrightarrow M_0$$

mit  $\eta_z([x]) := x - \lambda - z$ , falls  $x$  ein Element aus  $M_z + \lambda$  mit  $\lambda \in \Lambda$  ist und betrachten das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} M_z & \xrightarrow{\pi} & [M_z] \\ \varphi_z \downarrow & & \downarrow \eta_z \\ M_0 & & M_0 \end{array}$$

Wir sehen, dass die Verknüpfung  $\eta_z \circ \pi \circ \varphi_z^{-1}$  der Identität entspricht. Die Überlagerung  $\pi$  ist also unverzweigt.

### 3.3 Eigenschaften von Überlagerungen

Wir haben bereits gesehen, dass die Quadratur  $()^2$  eine unverzweigte Überlagerung auf der punktierten Ebene  $\mathbb{C}^*$  und eine verzweigte Überlagerung auf  $\mathbb{C}$  ist. Der Punkt 0 scheint also in diesem Fall für die Art der Überlagerung ausschlaggebend zu sein. Die Punkte, an denen die Verzweigung „stattfindet“ nennen wir *Verzweigungspunkte* der Überlagerung.

**Definition 3.3 (Ordnung, Verzweigungspunkte und Grad).** Seien  $X$  und  $Y$  Riemannsche Flächen und sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung.

- (i) Wir definieren die *Verzweigungsordnung* von  $f$  in einem Punkt  $x \in X$  als das  $n_i$  aus der Definition 3.1 der Überlagerung, wenn  $g_i(x) = 0$  gilt. Die Verzweigungsordnung werden wir im Folgenden mit  $\text{ord}_x(f)$  bezeichnen.
- (ii) Alle Stellen  $x \in X$ , an denen die Verzweigungsordnung echt größer als 1 ist, heißen *Verzweigungspunkte* der Überlagerungsabbildung.
- (iii) Die *Gradfunktion*

$$\begin{aligned} \text{deg}(f, \_) : Y &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ y &\longmapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ord}_x(f) \end{aligned}$$

ordnet jedem Element aus  $Y$  den entsprechenden Grad bezüglich der Überlagerung  $f$  zu.

Im letzten Unterkapitel haben wir schon einige Überlagerungen kennengelernt. Nun werden wir zeigen, dass fast alle holomorphen Abbildungen, die in der Funktionentheorie Verwendung finden Überlagerungen sind. Dazu führen wir zunächst die Begriffe *endlich* und *eigentlich* ein.

**Definition 3.4 (endliche und eigentliche Abbildungen).** Es seien  $X$  und  $Y$  Riemannsche Flächen. Sei außerdem  $f : X \rightarrow Y$  eine holomorphe Abbildung.

- (i) Die Abbildung  $f$  heißt *eigentlich*, falls das Urbild jedes Kompaktums in  $Y$  auch kompakt in  $X$  ist.
- (ii) Die Abbildung  $f$  heißt *endlich*, falls sie eigentlich ist und die Faser  $f^{-1}(y)$  über jedem Punkt  $y \in Y$  endlich ist.

Betrachten wir die Beispiele aus Kapitel 3.2, so fällt auf, dass die Exponentialfunktion und die Projektion auf den Torus weder endlich noch eigentlich sind. Hingegen sind die Quadratur und die anderen trivialen Beispiele allesamt sowohl endlich als auch eigentlich. Es scheint also kaum Abbildungen zu geben, die eigentlich, aber nicht endlich sind. Im dem folgenden Satz sehen wir, dass die beiden Begriffe sehr ähnlich sind und außerdem im Zusammenhang mit Überlagerungen stehen.

**Satz 3.5.** *Seien  $X$  und  $Y$  zwei zusammenhängende, nicht-leere Riemannsche Flächen und  $f : X \rightarrow Y$  eine holomorphe Abbildung zwischen ihnen.*

- (a) *Die Abbildung  $f$  ist endlich dann und nur dann, wenn sie eigentlich und nicht-konstant ist.*
- (b) *Wenn die Abbildung  $f$  endlich ist, dann ist sie eine Überlagerung.*
- (c) *Sei  $f$  eine Überlagerung. Wenn die Faser in einem Punkt  $y \in Y$  bezüglich  $f$  endlich ist, so ist die Abbildung  $f$  endlich.*

*Beweis.* Wir zeigen als erstes die Aussage (a).

„ $\Rightarrow$ “: Wenn die Abbildung  $f$  endlich ist, so ist sie nach Definition 3.4 insbesondere auch eigentlich. Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Abbildung nicht konstant sein kann.

Angenommen  $f$  ist konstant, dann wird ganz  $X$  auf einen Punkt  $y$  abgebildet. Das Urbild  $f^{-1}(y) = X$  ist nicht endlich, da jede Riemannsche Fläche unendlich viele Punkte enthält. Dies folgt sofort, da sie lokal homöomorph zu einer offenen Umgebung von  $\mathbb{C}$  ist. Damit kann  $f$  nicht endlich sein.

„ $\Leftarrow$ “: Die Abbildung  $f$  sei eigentlich und nicht-konstant. Im Folgenden zeigen wir, dass sie dann auch endlich ist. Sei  $y \in Y$  beliebig. Wir wollen zunächst zeigen, dass zu jedem Punkt  $x \in f^{-1}(y)$  aus der Faser eine offene Umgebung  $U \ni x$  existiert, die keinen weiteren Punkt aus der Faser enthält. Den Beweis führen wir indirekt. Dazu nehmen wir an, dass ein  $x \in f^{-1}(y)$  existiert, sodass es für alle offenen Umgebungen  $U$  von  $x$  ein  $\tilde{x} \in f^{-1}(y) - \{x\}$  mit  $\tilde{x} \in U$  gibt.

Wir wählen eine Karte  $(U', \varphi)$  um  $x$  und stellen fest, dass die Menge  $\varphi(f^{-1}(y))$  einen Häufungspunkt  $\varphi(x)$  in  $\varphi(U') \subseteq \mathbb{C}$  hat. Wir können nämlich zu jeder offenen Umgebung  $W$  von  $\varphi(x)$  das Urbild  $\varphi^{-1}(W)$  unter  $\varphi$  betrachten. Da  $\varphi$  eine stetige Abbildung ist, ist  $\varphi^{-1}(W)$  offen. Laut unserer Annahme finden wir dann aber einen weiteren Punkt  $\tilde{x}$  aus der Faser  $f^{-1}(y)$ , welcher auch in  $\varphi^{-1}(W)$  liegt. Der Bildpunkt  $\varphi(\tilde{x})$  liegt dann wieder in  $\varphi(U')$  und ist ungleich  $\varphi(x)$ .

Wir wählen eine beliebige Karte  $(V', \psi)$  um  $y$ . Die Abbildung

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U' \cap f^{-1}(V')) \rightarrow \mathbb{C}$$

ist auf  $(\varphi(f^{-1}(y) \cap U'))$  konstant. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $U' \cap f^{-1}(V')$  eine zusammenhängende, offene Menge ist und den Identitätssatz (z.B. [6], Korollar 3.57) anwenden. Aus dem Satz folgt, dass die Abbildung  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  konstant auf  $\varphi(U' \cap f^{-1}(V'))$  ist. Damit ist aber auch die Abbildung  $f$  konstant auf  $U$ , da  $\varphi$  und  $\psi$  bijektiv sind. Wir zeigen, dass die Menge  $M := \{x \in X \mid f \text{ ist lokal konstant in } x\} \subseteq X$  offen und abgeschlossen ist. Sei  $m \in M$  beliebig, dann können wir beliebige Karten  $(U_m, \varphi_m)$  um  $m$  und  $(V_{f(m)}, \psi_{f(m)})$  um  $f(m)$  wählen und wieder den Identitätssatz anwenden. Dann ist  $f$  auf ganz  $U_m \cap V_{f(m)} \ni m$  lokal konstant. Damit haben wir gezeigt, dass  $M$  offen ist. Analog können wir zu  $\tilde{m} \in M^c$  aus dem Komplement von  $M$  eine Umgebung finden, die keinen lokal konstanten Punkt enthält, da sonst nach dem Identitätssatz die Abbildung  $f$  auch lokal konstant auf einer Umgebung von  $\tilde{m}$  wäre. Somit haben wir auch gezeigt, dass das Komplement  $M^c$  von  $M$  offen ist. Da  $M$  offen,

abgeschlossen und nicht-leer ist und  $X$  zusammenhängend ist, müssen  $X$  und  $M$  übereinstimmen. Die Abbildung  $f$  ist also konstant. Dies steht im Widerspruch zur Aussage unseres Satzes.

Da wir nun gezeigt haben, dass zu jedem Punkt  $x$  aus der Faser  $f^{-1}(y)$  eine offene Umgebung  $U \ni x$  existiert, die keinen weiteren Punkt aus der Faser enthält, können wir eine offene Überdeckung  $\bigcup_{i \in I} U_i \supseteq f^{-1}(y)$  wählen, sodass die einzelnen  $U_i$  jeweils nur einen Punkt aus der Faser  $f^{-1}(y)$  enthalten. Wie wir wissen, sind Einpunktmengen, also explizit auch die Menge  $\{y\}$ , kompakt. Da die Abbildung  $f$  eigentlich ist, ist auch das Urbild  $f^{-1}(y)$  kompakt. Wir erhalten also eine endliche Teilüberdeckung  $\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \supseteq f^{-1}(y)$ . Wie wir sehen, besteht die Menge  $f^{-1}(y)$  aus höchstens  $n$  verschiedenen Elementen, da die einzelnen offenen Mengen der Teilüberdeckung je nur einen Punkt aus  $f^{-1}(y)$  enthalten. Damit ist die Faser  $f^{-1}(y)$  endlich. Da wir dies für ein beliebiges  $y \in Y$  gezeigt haben, ist auch die Abbildung  $f$  endlich.  $\square$  (a)

Als nächstes zeigen wir die Aussage (b). Sei  $f$  eine endliche Abbildung und sei  $y \in Y$  beliebig. Zunächst untersuchen wir, ob die Abbildung  $f$  surjektiv ist, indem wir nachprüfen ob  $f(X)$  abgeschlossen und offen ist.

Wir zeigen die Abgeschlossenheit von  $f(X)$  indirekt, indem wir annehmen, dass  $f(X)$  nicht abgeschlossen ist. Wir finden also ein  $v \in Y - f(X)$  mit der Eigenschaft, dass in jeder offenen Umgebungen von  $v$  ein Element aus dem Bild von  $f$  existiert. Wir wählen eine Karte  $(V, \varphi)$  mit  $v \in V \subseteq Y$  und  $\varphi(v) = 0$ . Wir finden dann ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq n_0$  die Kreisscheibe  $B_{\frac{1}{n}}(0)$  in  $\varphi(V)$  liegt. Da die Urbildmengen  $\varphi^{-1}(B_{\frac{1}{n}}(0))$  offene Umgebungen von  $v$  sind, können wir eine Folge  $(v_n)_{n \geq n_0+1} \subseteq f(X)$  mit  $v_n \in \varphi^{-1}(B_{\frac{1}{n}}(0))$  wählen. Das Urbild

$$K := \varphi^{-1} \left( \overline{B_{\frac{1}{n_0}}(0)} \right)$$

der kompakten Kreisscheibe enthält die Folgenglieder  $(v_n)_{n \geq n_0+1}$  und ist wieder ein Kompaktum, da  $\varphi^{-1}$  eine stetige Abbildung ist. Da  $f$  endlich ist, liegen in der Faser über jedem Folgenglied  $v_n$  nur endlich viele Elemente  $x_j^{v_n}$ ,  $j \in J_n$ . Wir erhalten eine Folge  $(x_j^{v_n})_{j \in J_n, n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ . Die Abbildung  $f$  ist nach Definition 3.4 auch eigentlich. Das bedeutet, dass die Folge  $(x_j^{v_n})_{j \in J_n, n \in \mathbb{N}}$  in dem Kompaktum  $f^{-1}(K)$  enthalten ist. Es gibt also einen Häufungspunkt der Folge und wir können eine konvergente Teilfolge  $(x_{j_k}^{v_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_{j_k}^{v_{n_k}} \rightarrow x$  für  $k \rightarrow \infty$  auswählen. Da  $f$  eine stetige Abbildung ist, ist sie insbesondere folgenstetig und es gilt

$$f(x_{j_k}^{v_{n_k}}) = v_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) = v \in f(X),$$

was im Widerspruch zu  $v \in Y - f(X)$  steht. Also ist  $f(X)$  abgeschlossen.

Wir müssen noch zeigen, dass  $f(X)$  offen ist. Dazu wählen wir einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von  $X$  und einen Atlas  $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$  von  $Y$ . Wir wissen, dass  $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ , wie bereits in (a) gezeigt, eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung und  $\psi_j^{-1}$  ein Homöomorphismus ist. Außerdem ist  $\varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j))$  offen. Daher ist

$$f(U_i) = \bigcup_{j \in J} \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j))$$

eine offene Menge. Weiterhin ist

$$f(X) = \bigcup_{i \in I} f(U_i)$$

eine Vereinigung von offenen Mengen, also selbst offen. Somit haben wir gezeigt, dass  $f$  surjektiv ist.

Da die Abbildung  $f$  endlich ist, können wir zu jedem beliebigen  $y \in Y$  die Urbildmenge schreiben als  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_d\}$  mit  $d \in \mathbb{N}$ . Wir wählen Karten  $(V, h)$  um  $y$  und  $(U_i, g_i)$  um  $x_i$ . Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, dass  $f(U_i)$  in  $V$  enthalten ist. Andernfalls schneiden wir  $U_i$  mit  $f^{-1}(V)$  und wählen  $g_i|_{f^{-1}(V) \cap U_i}$  als neue Kartenabbildung. Wir können außerdem annehmen, dass die einzelnen  $U_i$  paarweise disjunkt sind. Falls dies nicht der Fall ist, können wir offene Umgebungen  $U^i$  von  $x_i$  mit  $i = 1, \dots, d$  finden, die paarweise disjunkt sind, da die Riemannsche Fläche  $X$  ein Hausdorffraum ist. Wir können die Mengen  $U_i$  mit  $U^i$  schneiden und erhalten neue Karten  $(U_i \cap U^i, g_i|_{U_i \cap U^i})$  um  $x_i$ .

Nun wird es etwas technisch, da wir die Karten so verändern möchten, dass wir eine Abbildung wie in der Formel (3.1) erhalten. Sei dazu  $i \in \{1, \dots, d\}$  beliebig. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass für die Karten  $(U_i, g_i)$  um  $x_i$  und  $(V, h)$  um  $y$

$$g_i(x_i) = 0 \quad \text{und} \quad h(y) = 0$$

gilt. Die Abbildung  $h \circ f \circ g_i^{-1}$  ist holomorph auf  $U_i$  und wir können eine Potenzreihenentwicklung

$$h \circ f \circ g_i^{-1}(z) = \sum_{j=n_i}^{\infty} b_j z^j$$

mit  $b_{n_i} \neq 0$  auf einer geeigneten Umgebung von 0 angeben. Da die Abbildung  $h \circ f \circ g_i^{-1}$  im Punkt 0 eine  $n_i$ -fache Nullstelle hat, können wir eine  $n_i$ -te Wurzel  $\varphi$  der Abbildung ziehen. Dies ist aus der Funktionentheorie bekannt ([1], Satz 12.33). Wir können auch eine Potenzreihenentwicklung

$$\varphi(z) = z \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$$

auf einer genügend kleinen Umgebung von 0 für  $\varphi$  angeben. Es gilt

$$h \circ f \circ g_i^{-1}(z) = \sum_{j=n_i}^{\infty} b_j z^j = (\varphi(z))^{n_i} = \left( z \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l \right)^{n_i}$$

und durch einen Koeffizientenvergleich wird klar, dass  $c_0$  eine  $n_i$ -te Wurzel von  $b_{n_i} \neq 0$  sein muss. Die erste Ableitung von  $\varphi$  ausgewertet an der 0

$$\varphi'(z)|_{z=0} = c_0 \neq 0$$

verschwindet nicht. Daher können wir ein lokales Inverses von  $\varphi$  auf  $g(\tilde{U}_i)$  mit einer Teilmenge  $\tilde{U}_i \subseteq U_i$  angeben ([6], Satz 2.26). Nun wählen wir  $\tilde{g}_i := \varphi \circ g_i$  als neue Kartenabbildung. Es gilt

$$\begin{aligned} h \circ f \circ \tilde{g}_i^{-1}(z) &= (h \circ f \circ g_i^{-1} \circ \varphi^{-1})(z) \\ &= (\varphi \circ \varphi^{-1}(z))^{n_i} \\ &= z^{n_i} \end{aligned}$$

auf der Menge  $\tilde{g}(\tilde{U}_i)$ . Wir können dieses Verfahren wiederholen und finden zu jedem  $i \in \{1, \dots, d\}$  Karten  $(\tilde{U}_i, \tilde{g}_i)$  von  $x_i$  mit  $\tilde{U}_i \subseteq U_i$ , sodass

$$\begin{aligned} h \circ f \circ \tilde{g}_i^{-1} : \tilde{g}_i(\tilde{U}_i) &\longrightarrow h(V) \\ z &\longmapsto z^{n_i} \end{aligned}$$

mit  $n_i = \text{ord}_{x_i}(f) \in \mathbb{N}$  gilt. Die Vereinigung  $\bigcup_{i \in \{1, \dots, d\}} \tilde{U}_i$  bildet eine Umgebung von  $f^{-1}(y)$ . Wir definieren

$$\tilde{V} := V \cap \bigcap_{i=1}^d f(\tilde{U}_i) \quad \text{und} \quad \hat{U}_i := \tilde{U}_i \cap f^{-1}(\tilde{V})$$

durch Verkleinern der Mengen  $V$  und  $\tilde{U}_i$ . Nun sind die beiden Eigenschaften  $f^{-1}(\tilde{V}) = \bigcup_{i=1}^d \hat{U}_i$  und  $f(\hat{U}_i) = \tilde{V}$  erfüllt, wobei die  $\hat{U}_i$  paarweise disjunkt sind. Mit den soeben konstruierten Karten  $(\hat{U}_i, \tilde{g}_i|_{\hat{U}_i})$  und  $(\tilde{V}, h|_{\tilde{V}})$  erfüllt die Abbildung  $f$  alle Eigenschaften einer Überlagerung.  $\square$  (b)

Nun beweisen wir Aussage (c). Sei also  $f$  eine Überlagerung,  $Y$  eine zusammenhängende Riemannsche Fläche und die Faser von  $f$  über einem Punkt endlich. Wir müssen entsprechend der Definition 3.4 zeigen, dass  $f$  eigentlich und  $f^{-1}(y)$  für alle  $y \in Y$  endlich ist.

Wir zeigen zunächst, dass die Faser  $f^{-1}(y)$  über jedem Punkt  $y \in Y$  endlich ist. Sei  $y \in Y$  beliebig. Sei außerdem  $x_i \in f^{-1}(y)$  ein beliebiges Element aus der Faser. Wir wissen bereits, dass die Abbildung  $f$  eine Überlagerung ist und sich somit lokal als

$$\varphi \circ f \circ \psi_i^{-1} = (z \mapsto z^{n_i})$$

darstellen lässt. Auf einer genügend kleinen Kreisscheibe  $B_\varepsilon(0)$  hat jeder Punkt in  $B_\varepsilon(0) - \{0\}$  genau  $n_i$  Urbilder bezüglich der Abbildung  $\varphi \circ f \circ \psi_i^{-1}$ . Diese Urbildpunkte haben alle eine Verzweigungsordnung von Grad 1. Der Punkt 0 hat nur einen Punkt im Urbild mit Verzweigungsordnung  $n_i$ . Damit ist die Verzweigungsordnung  $\text{ord}_{(\_)}(f)$  lokal konstant in  $x_i$ . Da der Grad  $\deg(f, \_)$  von  $f$  die Summe der Verzweigungsordnungen der Urbilder ist, ist auch dieser lokal konstant. Die Riemannsche Fläche  $Y$  ist zusammenhängend. Daher muss die Gradfunktion  $\deg(f, \_)$  auch global konstant sein. Wir wissen bereits, dass die Urbildmenge in einem Punkt endlich ist. Damit ist auch der Grad in diesem Punkt endlich. Da außerdem die Anzahl der Urbildpunkte in der Faser immer kleiner oder gleich dem Grad ist, muss die Urbildmenge in jedem Punkt endlich sein.

Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildung  $f$  eigentlich ist. Sei dazu  $K \subseteq Y$  eine beliebige kompakte Teilmenge. Zu jedem  $y \in Y$  wählen wir Kartenumgebungen  $(V_{(y)}, h_{(y)})$  und  $(U_{j,(y)}, g_{j,(y)})$  wie in der Definition 3.1 der Überlagerung. Indem wir ein genügend kleines  $\varepsilon$  wählen, finden wir eine offene Umgebung  $V'_{(y)} = h_{(y)}^{-1}(B_\varepsilon(h_{(y)}(y)))$  von  $y$ , sodass der Abschluss  $\overline{V'_{(y)}}$  in  $V_{(y)}$  enthalten ist. Die Umgebungen  $V'_{(y)}$  mit  $y \in Y$  überdecken  $Y$  und damit auch das Kompaktum  $K$ . Da  $K$  kompakt ist, finden wir endlich viele  $y_1, \dots, y_r \in Y$ , sodass  $K$  in der Vereinigung endlich vieler offener Mengen  $\bigcup_{i=1}^r V'_{(y_i)}$  enthalten ist. Wir wollen zeigen, dass

$$f^{-1}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^r f^{-1}(\overline{V'_{(y_i)}})$$

kompakt ist. Dazu reicht es die Kompaktheit der einzelnen  $f^{-1}(\overline{V'_{(y_i)}})$  und die Abgeschlossenheit von  $f^{-1}(K)$  nachzuprüfen. Da

$$f^{-1}(V_{(y_i)}) = \bigcup_j U_{j,(y_i)}$$

eine endliche disjunkte Vereinigung ist, reicht es, zu zeigen, dass die Einschränkung  $f|_{U_{j,(y_i)}} : U_{j,(y_i)} \rightarrow V_{(y_i)}$  eigentlich ist. Wir können stattdessen auch zeigen, dass

$$\eta := h_{(y_i)} \circ f \circ g_{j,(y_i)}^{-1} : g_{j,(y_i)}(U_{j,(y_i)}) \longrightarrow h_{(y_i)}(V_{(y_i)})$$

$$z \longmapsto z^n$$

eigentlich ist, da die Abbildungen  $h_{(y_i)}$  und  $g_{j,(y_i)}$  Homöomorphismen sind. Eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  ist beschränkt und daher ist auch das Urbild  $\eta^{-1}(B_r(0)) \subseteq B_{\sqrt{r}}(0)$  beschränkt. Da  $\eta$  außerdem stetig ist, ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen. Die Abbildung  $\eta$  ist also eigentlich.

Wir müssen nur noch zeigen, dass  $f^{-1}(K)$  abgeschlossen ist. Da die Riemannsche Fläche  $Y$  insbesondere ein Hausdorffraum ist, wissen wir, dass jede kompakte Menge in  $Y$  abgeschlossen ist. Da die Abbildung  $f$  stetig ist, muss auch das Urbild  $f^{-1}(K)$  abgeschlossen sein.  $\square$  (c)

Damit haben wir den Satz bewiesen.  $\square$

Wie bereits erwähnt sind sehr viele, in der Funktionentheorie gebräuchliche, holomorphe Abbildungen Überlagerungen.

**Korollar 3.6.** *Jede nicht-konstante, holomorphe Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei nicht-leeren, zusammenhängenden, kompakten Riemannschen Flächen ist eine Überlagerung.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $f$  eigentlich ist. Sei  $K \subseteq Y$  ein Kompaktum, dann ist  $K$  insbesondere eine abgeschlossene Menge. Das Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist abgeschlossen, also ist  $f^{-1}(K)$  abgeschlossen. Da  $X$  ein kompakter Raum ist, ist auch die abgeschlossene Menge  $f^{-1}(K)$  kompakt. Die Abbildung  $f$  ist also eigentlich.

Wir argumentieren nun mit Satz 3.5. Wegen (a) ist  $f$  endlich. Aufgrund von (b) ist  $f$  damit eine Überlagerung.  $\square$

## 4 Hochhebungen und Deckbewegungen

In diesem Kapitel werden wir die Begriffe Wege und Überlagerungen in Verbindung setzen und dadurch eine Beziehung zur Fundamentalgruppe herstellen.

Wir orientieren uns größtenteils am Kapitel III.5 der Quelle [3] von Freitag und am Kapitel 3.3 aus dem Skript [5] von Möller. In [3] wurden die Konzepte der *Hochhebungen* und *Deckbewegungen* auf rein topologischen Räumen konstruiert und erst danach auf die Riemannschen Flächen übertragen. Wir werden diesen Zwischenschritt jedoch umgehen und bei beiden Begriffen direkten Bezug zu den Riemannschen Flächen nehmen. Am Ende führen wir die beiden Konzepte zusammen und können eine *universelle Überlagerung* zu jeder zusammenhängenden Riemannschen Fläche finden. Mit dieser lässt sich die Fundamentalgruppe der Riemannschen Fläche exakt bestimmen.

### 4.1 Hochhebungen

Wir wissen bereits, dass unverzweigte Überlagerungen  $f : X \rightarrow Y$  lokal biholomorph sind. Wenn wir nun eine stetige Abbildung  $g : Z \rightarrow Y$  haben, so können wir lokal auf  $Z' \subset Z$ , durch Komposition mit einer lokalen Inversen von  $f$ , eine stetige Abbildung  $h : Z' \rightarrow X$  konstruieren. Es gilt dann  $f \circ h = g$  auf  $Z'$ . Wir werden zeigen, dass wir auch global eine stetige Abbildung  $h : Z \rightarrow X$  konstruieren können mit der Eigenschaft  $f \circ h = g$  auf ganz  $Z$ , wenn die Riemannsche Fläche  $Z$  einfach zusammenhängend ist.

**Definition 4.1 (Hochhebung).** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine unverzweigte Überlagerung und sei  $g : Z \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Wir nennen eine stetige Abbildung  $h : Z \rightarrow X$  eine *Hochhebung*, falls sie  $f \circ h = g$  erfüllt.

Freitag weist in [3] darauf hin, dass eine Hochhebung oft auch *Liftung* genannt wird. Dies sollte im Hinblick auf verschiedene Literatur berücksichtigt werden.

Als erstes betrachten wir die einfachste Art des Hochhebens.

**Lemma 4.2 (Hochheben von Wegen).** Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine unverzweigte Überlagerung und  $\eta : [0, 1] \rightarrow Y$  ein Weg in  $Y$ . Sei außerdem  $x \in f^{-1}(\eta(0))$  ein beliebiges Element aus der Faser des Startpunktes. Es existiert genau ein Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  in  $X$  mit Startpunkt  $\gamma(0) = x$ , sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \gamma & \downarrow f \\ [0, 1] & \xrightarrow{\eta} & Y \end{array}$$

kommutiert.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir die Existenz eines Weges  $\gamma$  wie oben. Wir überdecken dazu das Bild  $\text{Im}(\eta) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$ , wobei wir für die  $V_i$  fordern, dass wie in der Definition 3.1 der Überlagerung die Eigenschaft

$$f^{-1}(V_i) = \dot{\bigcup}_{j \in J} U_j^i$$

gewahrt ist. Nun wählen wir gemäß Proposition 2.13 eine Zerlegung

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1,$$

sodass  $\eta([s_{k-1}, s_k])$  in  $V_{i_k}$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  enthalten ist.

Wir zeigen die Existenz einer Hochhebung auf  $[0, s_k]$  durch Induktion nach  $k$ . Dazu betrachten wir zunächst den Fall  $k = 1$ . Das Bild von  $[0, s_1]$  unter  $\eta$  ist ganz in  $V_{i_1}$  enthalten. Wir wählen die entsprechende Umgebung  $U_j^{i_1}$ , die den Punkt  $x$  enthält. Die Abbildung  $f|_{U_j^{i_1}} : U_j^{i_1} \rightarrow V_1$  ist bijektiv, also können wir den ersten Teil des Weges  $\gamma$  definieren, indem wir

$$\gamma(t) := \left( f|_{U_j^{i_1}} \right)^{-1} (\eta(t))$$

für alle  $t \in [0, s_1]$  setzen. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass wir  $\gamma$  auf  $[0, s_{k-1}]$  bereits konstruiert haben. Analog wie oben finden wir eine Komponente  $U_j^{i_k}$  von  $f^{-1}(V_{i_k})$ , sodass  $\gamma(s_{k-1})$  in  $U_j^{i_k}$  liegt. Wir erhalten wieder eine bijektive Abbildung  $f|_{U_j^{i_k}} : U_j^{i_k} \rightarrow V_{i_k}$  und können den Weg  $\gamma$  auf  $[s_{k-1}, s_k]$  durch

$$\left( f|_{U_j^{i_k}} \right)^{-1} \circ \eta \tag{4.1}$$

fortsetzen.

Da das Intervall in endlich viele Stücke zerteilt wurde, bricht das Verfahren ab und wir erhalten die gesuchte Funktion  $\gamma$  auf ganz  $[0, 1]$ . Der Weg ist stetig, da er sich lokal wie in (4.1) beschreiben lässt. Hierbei ist die eingeschränkte Abbildung  $f|_{U_j^{i_k}}$  homöomorph und  $\eta$  stetig. Analog wie in Lemma 2.3 können wir zeigen, dass der stückweise konstruierte Weg auch an den Übergangsstellen stetig ist.

Im Folgenden wollen wir noch zeigen, dass  $\gamma$  die einzige Hochhebung des Weges  $\eta$  mit dem Startpunkt  $x$  ist. Wir orientieren uns dabei am Beweis von Proposition 3.16 der Quelle [5]. Angenommen es existiert noch eine zweite Hochhebung  $\tilde{\gamma}$  des Weges  $\eta$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = x$ . Dann betrachten wir die Menge

$$M := \{m \in [0, 1] \mid \gamma(s) = \tilde{\gamma}(s)\} \subseteq [0, 1].$$

Wir zeigen, dass  $M$  offen ist, indem wir zu jedem  $m_0 \in M$  eine Umgebung  $U_{m_0}$  finden, sodass  $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s)$  für alle  $m \in U_{m_0}$  gilt. Dazu nehmen wir die Umgebung  $U$  um den Punkt  $\gamma(m_0)$  aus der Definition 3.1 der Überlagerung zur Hilfe. Die Einschränkung der Abbildung  $f|_U$  ist biholomorph. Daher müssen beide Hochhebungen auf  $\eta^{-1}(f(U))$  mit  $(f|_U)^{-1} \circ \eta$  übereinstimmen. Die Menge  $U_{m_0} := \eta^{-1} \circ f(U) \ni m_0$  ist also in  $M$  enthalten. Wir können außerdem zeigen, dass  $M$  abgeschlossen ist. Sei dazu  $m_1 \in [0, 1] - M$  beliebig. Da  $X$  ein Hausdorffraum ist, können wir disjunkte Umgebungen  $U$  von  $\gamma(m_1)$  und  $\tilde{U}$  von  $\tilde{\gamma}(m_1)$  finden. Die Menge

$$\gamma^{-1}(U) \cap \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{U}) \subseteq [0, 1] - M$$

ist offen und enthält den Punkt  $m_1$ . Wir wissen nun, dass  $[0, 1] - M$  offen und  $M$  abgeschlossen ist. Damit ist die Menge  $M$  offen, abgeschlossen und nicht-leer, weil  $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$  gilt. Da  $[0, 1]$  zusammenhängend ist, muss  $M = [0, 1]$  sein. Die Hochhebung ist also eindeutig.  $\square$

Da wir nun die Hochhebungen eines Weges finden können, stellt sich die Frage, ob wir durch leichtes „Wackeln“ an diesem Weg auch nur leicht an seinen Hochhebungen „wackeln“.

**Lemma 4.3 (Hochheben von Homotopien).** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine unverzweigte Überlagerung. Seien außerdem  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$  zwei Wege mit gleichem Startpunkt. Wenn die Wege  $\eta_0 := f \circ \gamma_0$  und  $\eta_1 := f \circ \gamma_1$  in  $Y$  homotop sind, dann sind auch  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  homotop.*

*Beweis.* Sei  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $\eta_0$  und  $\eta_1$ . Entsprechend der Definition 2.4 der Homotopie haben die einzelnen Wege  $\eta_t : [0, 1] \rightarrow Y$  mit  $\eta_t(s) := k(s, t)$  für alle  $s, t \in [0, 1]$  denselben Anfangspunkt  $f(\gamma_0(0))$  und denselben Endpunkt  $f(\gamma_0(1))$ . So wie im Lemma 4.2 bereits gezeigt, lassen sich die Wege  $\eta_t$  zu  $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow X$  mit Startpunkt  $\gamma_0(0)$  hochheben. Wir können eine Homotopie

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto h(s, t) := \gamma_t(s) \end{aligned}$$

definieren. Diese Abbildung erfüllt die Eigenschaften  $h(0, t) = \gamma_0(0)$ ,  $h(s, 0) = \gamma_0(s)$  und  $h(s, 1) = \gamma_1(s)$ .

Wir müssen zeigen, dass die Abbildung  $h$  stetig ist. Dazu überdecken wir  $\eta_0([0, 1])$  mit den  $V^j$  aus der Definition 3.1 der Überlagerung. Da  $[0, 1]$  kompakt ist, reichen endlich viele  $V^j$  aus. Sei nun  $U_i^j$  die Komponente von  $f^{-1}(V^j)$ , die den entsprechenden Teil von  $\gamma_0$  enthält. Wir erhalten eine bijektive Abbildung

$$f|_{U_i^j} : U_i^j \rightarrow V^j$$

und definieren  $\tau_j$  als die Inverse dieser Abbildung. Es gilt also  $f \circ \tau_j = \text{id}_{V^j}$  und  $\tau_j \circ f = \text{id}_{U_i^j}$ . Wir können die einzelnen Umkehrabbildungen  $\tau_j$  zu einer Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : \bigcup_{j=1}^d V^j &\longrightarrow X \\ v &\longmapsto \tau_j(v), \quad \text{für } v \in V^j \end{aligned}$$

zusammensetzen. Es gilt insbesondere  $f \circ \tau \circ \eta_0 = \eta_0$ . Wegen der Stetigkeit von  $k$  können wir ein  $\varepsilon > 0$  finden, sodass  $k([0, 1] \times [0, \varepsilon))$  in  $V := \bigcup_{j=1}^d V^j$  enthalten ist. Dies werden wir im Folgenden kurz begründen. Da  $k$  stetig ist, können wir zu allen Punkten  $(0, p)$  auf  $\{0\} \times [0, 1]$  eine offene Umgebung finden, deren Bild unter  $k$  vollständig in  $V$  liegt. Wir betrachten zunächst die Menge  $\{0\} \times [0, 1]$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ . Hier können wir eine Umgebungsbasis bestehend aus kleinen Rechtecken wählen. Das bedeutet, dass wir eine offene Umgebung  $U_p := (a_p, b_p) \times (c_p, d_p)$  um jeden Punkt  $(0, p)$  finden können, sodass das Bild  $k(U_p \cap [0, 1] \times [0, 1])$  vollständig in  $V$  liegt. Da  $\{0\} \times [0, 1]$  kompakt ist, reichen endlich viele Umgebungen aus, um die Menge  $\{0\} \times [0, 1] \subseteq \bigcup_{j \in J} U_{p_j}$  zu überdecken. Wenn wir  $\varepsilon$  als  $\frac{1}{2} \min\{b_{p_j} \mid j \in J\}$  wählen, so liegt  $k([0, 1] \times [0, \varepsilon))$  in  $V$ . Die Verknüpfung  $\tau \circ k : [0, 1] \times [0, \varepsilon) \rightarrow X$

ist ebenfalls stetig und stimmt auf  $[0, 1] \times [0, \varepsilon)$  mit  $h$  überein. Wir haben also die Stetigkeit von  $h$  auf  $[0, 1] \times [0, \varepsilon)$  gezeigt.

Wir wollen zeigen, dass die Abbildung  $h$  auf ganz  $[0, 1] \times [0, 1]$  stetig ist. Sei dazu  $t_0$  das Supremum über alle  $t$ , sodass  $h$  auf  $[0, 1] \times [0, t)$  stetig ist. Entsprechend unserer vorangegangenen Überlegung muss  $t_0 \geq \varepsilon > 0$  gelten.

Angenommen wir können zu allen Stellen  $(s_0, t_0)$  mit  $s_0 \in [0, 1]$  eine Umgebung  $U_{s_0, t_0}$  finden, sodass  $h$  stetig auf  $U_{s_0, t_0}$  ist. Wenn  $t_0 = 1$  ist, so sind wir bereits fertig, da dann  $h$  stetig ist. Falls aber  $t_0 < 1$  ist, so können wir analog wie oben durchgeführt ein  $\varepsilon$  konstruieren, sodass  $h$  auf  $[0, 1] \times [0, t_0 + \varepsilon)$  stetig ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass  $t_0$  bereits ein Supremum ist.

Wir können also eine Stelle  $(s_0, t_0)$  mit  $s_0 \in [0, 1]$  finden, um die keine Umgebung existiert, auf welcher  $h$  stetig ist. Wie in der Definition 3.1 der Überlagerung wählen wir nun eine Umgebung  $V^{k(s_0, t_0)}$  von  $k(s_0, t_0)$  und die Komponente  $U_j^{k(s_0, t_0)}$  von  $f^{-1}(V^{k(s_0, t_0)})$ , die  $h(s_0, t_0)$  enthält. Da  $k$  stetig ist, gilt  $k(V_{s_0} \times V_{t_0}) \subset V^{k(s_0, t_0)}$  für genügend kleine offene Teilmengen  $V_{s_0} \ni s_0$  und  $V_{t_0} \ni t_0$  von  $[0, 1]$ . Wir vertauschen die Rollen von  $s$  und  $t$  und heben die Wege  $u_s(t) = k(s, t)$  für  $t \in V_{t_0}$  und  $s \in V_{s_0}$  hoch. Wir betrachten  $h$  als die Schar der Hochhebungen. Die Hochhebungen haben eine eindeutige Fortsetzung nach  $t$ , wie man in Lemma 4.2 sieht. Wieder wie oben wählen wir ein  $\tau_{k(s_0, t_0)}$ . Da auch  $\tau_{k(s_0, t_0)} \circ k$  auf  $V_{s_0} \times V_{t_0}$  eine Hochhebung all dieser Abbildungen ist, muss  $h$  mit  $\tau_{k(s_0, t_0)} \circ k$  übereinstimmen. Wir wissen außerdem, dass  $\tau_{k(s_0, t_0)} \circ k$  auf  $V_{s_0} \times V_{t_0}$  stetig ist, also ist auch  $h$  auf  $V_{s_0} \times V_{t_0}$  stetig. Dies steht im Widerspruch dazu, dass wir keine Umgebung um  $(s_0, t_0)$  finden können, auf welcher  $h$  stetig ist.

Wir haben gezeigt, dass  $h$  eine stetige Abbildung ist. Damit ist  $h(1, \_)$  ein Weg mit Startpunkt  $\gamma_0(1)$ , also eine Hochhebung des Weges  $k(1, \_) = f(\gamma_0(1))$ . Dieser Weg ist entsprechend Lemma 4.2 eindeutig. Das bedeutet, dass auch  $h(1, t) = \gamma_0(1)$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt.  $\square$

Wir können nun Wege und Homotopien hochheben. Im nächsten Schritt wollen wir beliebige stetige Abbildungen hochheben.

**Proposition 4.4 (Hochheben von stetigen Abbildungen).** *Es seien im Folgenden eine unverzweigte Überlagerung  $f : X \rightarrow Y$  und eine stetige Abbildung  $g : Z \rightarrow Y$  gegeben, wobei die Punkte  $f(b) = g(c)$  für zwei Elemente  $c \in Z$  und  $b \in X$  übereinstimmen. Wenn  $Z$  einfach zusammenhängend ist, dann existiert eine eindeutige Hochhebung  $h : Z \rightarrow X$  mit  $h(c) = b$ , sodass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 h \nearrow & & \searrow f \\
 Z & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array} \tag{4.2}$$

*kommutiert.*

*Beweis.* Sei zunächst  $z \in Z$  beliebig. Da  $Z$  wegzusammenhängend ist, können wir einen Weg  $\alpha_z : [0, 1] \rightarrow Z$  mit  $\alpha_z(0) = c$  und  $\alpha_z(1) = z$  finden, der die Punkte  $c$  und  $z$  verbindet. Wir betrachten den Weg  $g \circ \alpha_z$  in  $Y$ . Sei  $\tilde{\alpha}_z : [0, 1] \rightarrow X$

die eindeutig bestimmte Hochhebung des Weges zum Anfangspunkt  $b$ , so wie in Lemma 4.2. Wir definieren die Abbildung  $h$  durch  $h(z) := \tilde{\alpha}_z(1)$ .

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass die Abbildung  $h$  nicht von der Wahl des verbindenden Weges  $\alpha_z$  abhängt. Sei dazu  $\beta_z$  ein zweiter Weg mit  $\beta_z(0) = c$  und  $\beta_z(1) = z$ . Da  $Z$  einfach zusammenhängend ist, sind die beiden Wege  $\alpha_z$  und  $\beta_z$  in  $Z$  homotop zueinander. Daraus folgt aber, dass auch die Wege  $g \circ \alpha_z = f \circ \tilde{\alpha}_z$  und  $g \circ \beta_z = f \circ \tilde{\beta}_z$  in  $X$  homotop zueinander sind. Hierbei sind  $\tilde{\alpha}_z$  und  $\tilde{\beta}_z$  die eindeutigen Hochhebungen der Wege  $g \circ \alpha_z$  und  $g \circ \beta_z$  gemäß Lemma 4.2. Entsprechend dem Lemma 4.3 über das Hochheben von Homotopien gilt, dass die beiden Wege  $\tilde{\alpha}_z$  und  $\tilde{\beta}_z$  homotop zueinander sind. Also stimmen  $\tilde{\alpha}_z(1)$  und  $\tilde{\beta}_z(1)$  überein.

Wir müssen nun noch zeigen, dass die konstruierte Abbildung  $h : Z \rightarrow X$  stetig ist. Dazu nehmen wir einen beliebigen Punkt  $z_0 \in Z$  zur Hand und zeigen die Stetigkeit der Abbildung in diesem Punkt. Sei  $U$  eine beliebige offene Umgebung um  $x_0 := h(z_0)$ . Wir werden zeigen, dass wir eine offene Umgebung  $W$  von  $z_0$  finden können, sodass  $h(W) \subseteq U$  gilt. Wir wählen eine offene Umgebung  $V$  von  $y_0 := g(z_0) \in Y$  mit

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

wie in der Definition 3.1 der Überlagerung. Sei  $U_{i_0}$  die Komponente von  $f^{-1}(V)$ , die den Punkt  $x_0$  enthält. Dann ist  $f(U_{i_0} \cap U) \subseteq V$  eine offene Umgebung von  $y_0$ . Außerdem ist  $f|_{U_{i_0} \cap U}$  biholomorph, da  $f$  eine unverzweigte Überlagerung ist. Da  $g$  stetig ist, können wir eine offene, wegzusammenhängende Umgebung  $W$  von  $z_0$  finden, sodass  $g(W)$  in  $f(U_{i_0} \cap U)$  enthalten ist. Wir zeigen nun, dass  $h(W)$  in  $U$  enthalten ist. Dazu sei  $w_0 \in W$  ein beliebiger Punkt. Da  $W$  wegzusammenhängend ist, finden wir einen Weg  $\gamma^{z_0, w_0}$  von  $z_0$  nach  $w_0$  in  $W \subseteq Z$ . Außerdem gibt es einen Weg  $\alpha_{z_0}$  von  $c$  nach  $z_0$  in  $Z$ , da  $Z$  wegzusammenhängend ist. Das nacheinander Entlanglaufen  $\alpha_{z_0} * \gamma^{z_0, w_0}$  der beiden Wege ist ein Weg von  $c$  nach  $w_0$ . Der Weg  $\tilde{\alpha}_{z_0} * \left( f|_{U_{i_0} \cap U}^{-1} \circ g(\gamma^{z_0, w_0}) \right)$ , wobei  $\tilde{\alpha}_{z_0}$  die eindeutige Hochhebung von  $g(\alpha_{z_0})$  mit Startpunkt  $b$  ist, ist eine Hochhebung des Weges  $g(\alpha_{z_0} * \gamma^{z_0, w_0})$  mit Startpunkt  $b$ . Wir folgern, dass der Punkt

$$\begin{aligned} h(w_0) &= \tilde{\alpha}_{z_0} * \left( f|_{U_{i_0} \cap U}^{-1} \circ g(\gamma^{z_0, w_0}) \right) (1) \\ &= f|_{U_{i_0} \cap U}^{-1} \circ g(\gamma^{z_0, w_0})(1) \in U_{i_0} \cap U \end{aligned}$$

in  $U$  enthalten. Da  $w_0 \in W$  beliebig war, ist ganz  $h(W)$  in  $U$  enthalten. Wir haben somit gezeigt, dass  $h$  stetig ist.

Die Eindeutigkeit können wir analog wie im Beweis von Lemma 4.2 folgern. Wir betrachten aber den zusammenhängenden Raum  $Z$  anstelle von  $[0, 1]$ .  $\square$

Auf den Riemannschen Flächen werden wir nicht nur mit stetigen Abbildungen, sondern größtenteils mit holomorphen Abbildungen arbeiten. Daher betrachten wir zum Schluss noch das Hochheben von holomorphen Abbildungen.

**Satz 4.5 (Hochheben von holomorphen Abbildungen).** *Die Voraussetzungen seien wie bei Proposition 4.4. Wenn die Abbildung  $g$  holomorph ist, so ist auch die eindeutige Hochhebung  $h$  holomorph.*

*Beweis.* Da die holomorphe Abbildung  $g$  insbesondere eine stetige Abbildung ist, finden wir nach Proposition 4.4 eine stetige Hochhebung  $h$ .

Wir müssen nur noch zeigen, dass  $h$  eine holomorphe Abbildung ist. Dazu sei zunächst  $z \in Z$  beliebig. Wir definieren  $x := h(z) \in X$  und  $y := g(z) \in Y$ . Da das Diagramm (4.2) kommutiert, ist auch  $f(x) = y$ . Wir wissen, dass  $f$  eine unverzweigte Überlagerung ist, das heißt wir finden Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$ , sodass die Einschränkung  $f|_U : U \rightarrow V$  biholomorph ist. Wir können außerdem eine Umgebung  $W \ni z$  finden, sodass  $g|_W$  nach  $V$  abbildet. Nun wissen wir, dass die Abbildung  $h$  auf  $W$  mit  $(f|_U)^{-1} \circ g|_W$  übereinstimmt. Das heißt, dass die Abbildung  $h$  auf  $W$  und damit auch in  $z$  holomorph sein muss. Da  $z \in Z$  aber beliebig war, ist  $h$  holomorph.  $\square$

Bisher haben wir gelernt, wie wir holomorphe Abbildungen  $g : Z \rightarrow Y$  hochheben können, falls der Definitionsbereich  $Z$  einfach zusammenhängend ist. Im weiteren Verlauf des Kapitels werden Überlagerungen mit einfach zusammenhängendem Definitionsbereich immer wieder verwendet. Wir wollen den Begriff der universellen Überlagerung für diese Art von Überlagerungen an dieser Stelle einführen, da er hier zum ersten Mal Verwendung findet.

**Definition 4.6 (universelle Überlagerung).** Sei  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  eine unverzweigte Überlagerung. Wir nennen die Überlagerung universell, falls  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist.

Universelle Überlagerungen  $g : \tilde{X} \rightarrow X$  erfüllen die Bedingungen, die in Satz 4.5 an die Abbildung gestellt werden. Es ist uns daher möglich zu jeder unverzweigten Überlagerung  $f : Y \rightarrow X$  eine holomorphe Hochhebung  $h : \tilde{X} \rightarrow Y$  von  $g$  zu finden.

## 4.2 Die Deckbewegungsgruppe

Wir wollen im Folgenden das Verhalten von Überlagerungen weiter untersuchen. *Deckbewegungen* sind biholomorphe Abbildungen. Sie permutieren die ähnlich aussehenden Teilgebiete des Raumes, die übereinander gelegt werden und eignen sich deshalb zum Studium der Überlagerungen.

Um zu dem Beispiel aus Kapitel 3.1 zurück zu kommen: Wenn wir das Maßband um einen Zentimeter nach links oder rechts verschieben, wird beim Zusammenrollen jedes Zentimeterstück an dieselbe Stelle gelegt, an die es auch ohne die Verschiebung gelegt worden wäre. Diese Verschiebung ist ein Beispiel für eine Deckbewegung.

Wir werden in diesem Kapitel die *Deckbewegungsgruppe* formal definieren und weiter untersuchen. Am Ende werden wir zu dem Schluss kommen, dass die Deckbewegungsgruppe einer universellen Überlagerung und die Fundamentalgruppe auf dem Bildraum isomorph zueinander sind. Dieses Resultat ermöglicht es uns, die Fundamentalgruppe zu bestimmen.

**Definition 4.7 (Deckbewegung).** Sei  $f : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung. Eine biholomorphe Abbildung  $\gamma : Y \rightarrow Y$  mit der Eigenschaft  $f \circ \gamma = f$  nennen wir eine *Deckbewegung*.

**Bemerkung 4.8.** Die Menge der Deckbewegungen einer Überlagerung zusammen mit der allgemein bekannten Verknüpfung von Funktionen  $\circ$  bildet eine Gruppe. Man nennt sie auch die *Deckbewegungsgruppe* der Überlagerung.

*Beweis.* Die Verknüpfung von Abbildungen ist assoziativ. Diese Eigenschaft wird an die Gruppenoperation vererbt. Das neutrale Element ist gegeben durch die Identität. Es gilt  $\varphi \circ \text{id} = \varphi$  für alle Deckbewegungen  $\varphi$ . Das inverse Element  $\gamma^{-1}$  einer Deckbewegung  $\gamma$  ist wieder eine Deckbewegung, da  $f \circ \gamma^{-1} = f \circ \gamma \circ \gamma^{-1} = f$  gilt. Nun müssen wir noch zeigen, dass die Gruppe abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung ist. Seien dazu  $\gamma$  und  $\varphi$  zwei Deckbewegungen der Überlagerung  $f$ . Dann gilt  $f \circ (\gamma \circ \varphi) = (f \circ \gamma) \circ \varphi = f \circ \varphi = f$ , also ist  $\gamma \circ \varphi$  eine Deckbewegung.  $\square$

Es ist zunächst gar nicht so klar, ob wir zu jeder Überlagerung Deckbewegungen finden können. Deshalb führen wir den Begriff *galois'sch* ein und zeichnen damit Überlagerungen  $f : Y \rightarrow X$  aus, bei denen wir zu je zwei Punkten  $a, b \in Y$  mit demselben Bildpunkt eine Deckbewegung  $\gamma$  finden können, die  $a$  auf  $b$  schickt.

**Definition 4.9 (galois'sch).** Sei  $f : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung. Die Überlagerung wird *galois'sch* genannt, falls zu zwei beliebigen Punkten  $a, b \in Y$  mit demselben Bildpunkt  $f(a) = f(b)$  eine Deckbewegung  $\gamma : Y \rightarrow Y$  existiert, sodass  $\gamma(a) = b$  gilt.

**Korollar 4.10.** *Alle universellen Überlagerungen  $f : Y \rightarrow X$  sind galois'sch. Außerdem ist die Deckbewegung mit  $\gamma(a) = b$  zu zwei beliebigen Punkten  $a$  und  $b$  in  $Y$  mit  $f(a) = f(b)$  eindeutig.*

*Beweis.* Sei  $f : Y \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung. Seien außerdem zwei Punkte  $a$  und  $b$  in  $Y$  mit der Eigenschaft  $f(a) = f(b)$  beliebig. Da  $Y$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, können wir nach Satz 4.5 eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung  $\gamma : Y \rightarrow Y$  mit den Eigenschaften  $\gamma(a) = b$  und  $f \circ \gamma = f$  finden. Damit haben wir bereits die Eindeutigkeit der Abbildung  $\gamma$  gezeigt.

Wir müssen nur noch zeigen, dass  $\gamma$  bijektiv ist. Analog wie oben können wir eine Abbildung  $\tilde{\gamma} : Y \rightarrow Y$  finden mit der Eigenschaft  $\tilde{\gamma}(b) = a$  und  $f \circ \tilde{\gamma} = f$ . Es gilt also  $\tilde{\gamma} \circ \gamma(a) = a$  und  $f \circ \tilde{\gamma} \circ \gamma = f \circ \tilde{\gamma} = f$ . Auch die Identität erfüllt  $f \circ \text{id} = f$  und  $\text{id}(a) = a$ . Nach Satz 4.5 ist die Abbildung mit diesen Eigenschaften aber eindeutig. Das heißt die Abbildungen  $\tilde{\gamma} \circ \gamma$  und  $\text{id}$  stimmen überein. Die Abbildung  $\tilde{\gamma}$  ist also die inverse Abbildung zu  $\gamma$  und  $\gamma$  ist bijektiv. Damit ist  $\gamma$  eine Deckbewegung.  $\square$

Wir wollen im weiteren Verlauf dieses Kapitels einen Quotienten  $X/\Gamma$  einer Riemannschen Fläche  $X$  und einer Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen  $\Gamma$  definieren. Damit dieser Quotient eine Riemannsche Fläche ist, müssen wir einige Anforderungen an die Gruppe  $\Gamma$  stellen. Wir führen den Begriff der *frei operierenden Gruppe* ein, um diese Eigenschaften zu bündeln. Wie wir sehen werden, ist die Deckbewegungsgruppe einer universellen Überlagerung eine frei operierende Gruppe.

**Definition 4.11 (frei operierende Gruppe).** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\Gamma$  eine Gruppe biholomorpher Abbildungen  $\gamma : X \rightarrow X$ . Die Gruppe *operiert frei* auf  $X$ , falls

- (i) die Identität das einzige Gruppenelement mit einem Fixpunkt ist und falls außerdem
- (ii) zu allen Punkten  $a, b \in X$  Umgebungen  $U \ni a$  und  $V \ni b$  in  $X$  existieren, sodass  $\gamma(U) \cap V = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(a) \neq b$  gilt.

**Proposition 4.12.** *Die Deckbewegungsgruppe einer universellen Überlagerung operiert frei.*

*Beweis.* Sei  $\Gamma$  die Deckbewegungsgruppe einer beliebigen universellen Überlagerung  $f : X \rightarrow Y$ . Wir prüfen, ob sie eine frei operierende Gruppe ist. In Korollar 4.10 haben wir bereits gesehen, dass die Deckbewegung durch das Bild eines Punktes eindeutig bestimmt ist. Damit kann nur die Identität einen Fixpunkt besitzen.

Wir müssen nur noch zeigen, dass zu allen Punkten  $a, b \in X$  Umgebungen  $U \ni a$  und  $V \ni b$  in  $X$  existieren, sodass der Schnitt  $\gamma(U) \cap V$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(a) \neq b$  leer ist. Seien  $a, b \in X$  beliebig. Wir betrachten zwei Fälle.

Im ersten Fall stimmen  $f(a)$  und  $f(b)$  nicht überein. Wir wählen zwei offene Umgebungen  $V(f(a))$  und  $V(f(b))$  von  $f(a)$  und  $f(b)$  mit leerem Schnitt. Nun definieren wir  $U(a) := f^{-1}(V(f(a)))$  und  $U(b) := f^{-1}(V(f(b)))$  als die Urbilder der Umgebungen. Da  $f$  stetig ist, sind  $U(a)$  und  $U(b)$  aber selbst wieder offene Umgebungen von  $a$  und  $b$ . Es gilt  $\gamma(U(a)) \cap U(b) = \emptyset$  für alle Deckbewegungen  $\gamma$ , da das Bild

$$\begin{aligned} f(\gamma(U(a)) \cap U(b)) &\subseteq f(\gamma(U(a))) \cap f(U(b)) \\ &= f(U(a)) \cap f(U(b)) \\ &= f(f^{-1}(V(f(a)))) \cap f(f^{-1}(V(f(b)))) \\ &\subseteq V(f(a)) \cap V(f(b)) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

in der leeren Menge enthalten ist.

Im zweiten Fall ist  $f(a) = f(b) =: c$ . Wir wählen wie in der Definition 3.1 der Überlagerung eine offene Umgebung  $V$  um  $c$ , sodass

$$f^{-1}(c) = \{u_i\}_{i \in I} \quad \text{und} \quad f^{-1}(V) = \dot{\bigcup}_{u_i \in f^{-1}(c)} U_{u_i}$$

gilt. Hierbei ist  $U_{u_i}$  die offene Umgebung, die den Punkt  $u_i$  enthält. Indem wir hierbei ohne Einschränkung annehmen, dass  $V$  zusammenhängend ist, sind auch alle  $U_{u_i}$  aus dem Urbild zusammenhängend. Es gilt  $\gamma(U_u) = U_{\gamma(u)}$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  und alle  $u$  aus der Faser  $f^{-1}(c)$ , da  $U_u$  zusammenhängend ist. Die Elemente  $\gamma(a)$  und  $b$  liegen beide in der Faser über  $c$  für alle  $\gamma \in \Gamma$ . Wenn die beiden Punkte  $\gamma(a)$  und  $b$  für ein  $\gamma \in \Gamma$  ungleich sind, dann müssen auch die Umgebungen  $U_{\gamma(a)}$  und  $U_b$  ungleich sein. Sie haben damit insbesondere einen leeren Schnitt. Die gesuchten Umgebungen sind also  $U_a$  und  $U_b$ .  $\square$

Wir können nun den *Quotientenraum* definieren. Im Anschluss darauf zeigen wir, dass die Projektion auf den Quotientenraum eine galois'sche Überlagerung ist.

**Definition 4.13.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und sei  $\Gamma$  eine frei operierende Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen auf  $X$ . Wir nennen  $a, b \in X$  *äquivalent* bezüglich  $\Gamma$ , falls  $\gamma(a) = b$  für ein  $\gamma \in \Gamma$ . Wir beschreiben mit  $X/\Gamma$  den *Quotientenraum* bezüglich der gerade eingeführten Äquivalenzrelation.

**Proposition 4.14.** Sei  $X$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und sei  $\Gamma$  eine Gruppe von biholomorphen Selbstabbildungen, welche auf  $X$  frei operiert. Dann können wir dem Quotientenraum  $X/\Gamma$  die Struktur einer Riemannschen Fläche verleihen, sodass die Projektion

$$\begin{aligned} p : X &\longrightarrow X/\Gamma \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

eine unverzweigte galois'sche Überlagerung mit Deckbewegungsgruppe  $\Gamma$  ist.

*Beweis.* Sei  $a \in X$  beliebig. Da  $\Gamma$  auf  $X$  frei operiert, können wir eine offene Umgebung  $U(a)$  finden, sodass  $\gamma(U(a)) \cap U(a)$  für alle  $\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}$  leer ist. Das Bild  $p(U(a))$  stimmt mit  $p(\gamma(U(a))) =: V(b)$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  überein und ist eine Umgebung von  $p(a) =: b$ . Wir können das Urbild

$$p^{-1}(V(b)) = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U(a)) \tag{4.3}$$

zerlegen. Sei außerdem  $(U(a), \varphi)$  mit  $\varphi : U(a) \rightarrow \mathbb{C}$  eine Karte, dann ist auch  $(V(b), \tilde{\varphi})$  mit  $\tilde{\varphi} : V(b) \rightarrow \mathbb{C}, [x] \mapsto \varphi(x)$  für  $x \in U(a)$  eine Karte. Die Abbildung  $\tilde{\varphi}$  ist wohldefiniert. Denn angenommen wir haben zwei Punkte  $[x] = [y] \in V(b)$ , wobei  $x \neq y$  beide in  $U(a)$  liegen, dann existiert ein  $\gamma \in \Gamma - \{\text{id}\}$  mit  $\gamma(x) = y$ . Der Punkt  $\gamma(x)$  liegt dann aber in  $\gamma(U(a))$  und der Punkt  $y$  liegt in  $U(a)$ . Der Widerspruch ergibt sich, da  $\gamma(U(a)) \cap U(a)$  leer ist.

Die Karten  $(V(b), \tilde{\varphi})$  machen den Quotienten außerdem zu einer Riemannschen Fläche. Wir müssen dazu nur noch zeigen, dass für zwei Karten  $(V(b), \tilde{\varphi})$  und  $(V'(b'), \tilde{\varphi}')$  die Verknüpfung  $\tilde{\varphi} \circ (\tilde{\varphi}')^{-1}$  biholomorph auf  $\tilde{\varphi}(V(b) \cap V'(b'))$  ist. Sei dazu  $(V(b), \tilde{\varphi})$  die Karte, die aus  $(U(a), \varphi)$  konstruiert wurde und  $(V'(b'), \tilde{\varphi}')$  die Karte, die aus  $(U'(a'), \varphi')$  konstruiert wurde. Wenn  $V(b) \cap V'(b')$  nicht-leer ist, so ist auch das Urbild

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(b) \cap V'(b')) &\subseteq f^{-1}(V(b)) \cap f^{-1}(V'(b')) \\ &= \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U(a)) \cap \dot{\bigcup}_{\gamma' \in \Gamma} \gamma'(U'(a')) \end{aligned}$$

unter  $f$  nicht-leer. Wir finden ein  $\gamma \in \Gamma$ , sodass  $U(a) \cap \gamma(U'(a'))$  nicht-leer ist. Für dieses  $\gamma$  gilt  $\varphi \circ \gamma \circ (\varphi')^{-1} = \tilde{\varphi} \circ (\tilde{\varphi}')^{-1}$ . Die Verknüpfung  $\tilde{\varphi} \circ (\tilde{\varphi}')^{-1}$  ist biholomorph, da auch die Abbildung  $\gamma$  biholomorph ist.

Die Verknüpfung

$$z \xrightarrow{\varphi^{-1}} \varphi^{-1}(z) \xrightarrow{p} [\varphi^{-1}(z)] \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \varphi(\varphi^{-1}(z)) = z \quad (4.4)$$

ist die Identität. Indem wir die Karten  $(\gamma(U(a)), \varphi \circ \gamma^{-1})$  um  $\gamma(a)$  für die anderen Umgebungen aus (4.3) verwenden, entsteht durch eine Verknüpfung wie in (4.4) wieder die Identität. Damit haben wir gezeigt, dass  $p$  eine unverzweigte Überlagerung ist.

Wir wollen nun zeigen, dass  $\Gamma$  die Deckbewegungsgruppe von  $p$  ist. Sei zunächst  $\gamma$  ein beliebiges Element aus der Gruppe  $\Gamma$ . Die Abbildung  $\gamma$  ist biholomorph, da  $\Gamma$  nur biholomorphe Selbstabbildungen enthält. Da für jedes beliebige  $x \in X$  die Eigenschaft

$$p \circ \gamma(x) = [\gamma(x)] = [x] = p(x)$$

erfüllt ist, ist  $\gamma$  eine Deckbewegung. Damit ist  $\Gamma$  eine Teilmenge der Deckbewegungen.

Sei nun anders herum  $\gamma$  eine Deckbewegung. Wir müssen zeigen, dass  $\gamma$  auch in  $\Gamma$  liegt. Wie wir bereits wissen, gilt  $[\gamma(x)] = [x]$  für alle  $x \in X$ . Sei  $x_0 \in X$  beliebig. Dann existiert ein  $\zeta \in \Gamma$ , sodass  $\gamma(x_0) = \zeta(x_0)$  gilt. Wir wollen nun zeigen, dass  $\gamma$  und  $\zeta$  gleich sind, also  $\gamma(x) = \zeta(x)$  für alle  $x \in X$ . Da aber  $\gamma$  und  $\zeta$  beides Deckbewegungen sind, müssen sie wegen Korollar 4.10 übereinstimmen.

Ebenfalls wegen Korollar 4.10 ist die Überlagerung galois'sch  $\square$

Wir kommen zum Ziel dieses Unterkapitels und klären den Zusammenhang zwischen der Deckbewegungsgruppe und der Fundamentalgruppe in dem folgenden

**Satz 4.15.** *Sei  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung und sei  $a \in X$  beliebig. Dann sind die Deckbewegungsgruppe  $\Gamma$  und die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, a)$  isomorph zueinander.*

*Beweis.* Wir wollen zunächst eine Abbildung zwischen den Gruppen konstruieren. Dazu wählen wir ein  $\tilde{a} \in f^{-1}(a)$ , welches wir für die ganze Konstruktion festhalten. Dies müssen wir tun, da die Abbildung von der Wahl des Elementes  $\tilde{a}$  abhängig sein wird. Für diesen Beweis lösen wir uns ein wenig von der Quelle [3] und splitten die Abbildung auf in  $m_1 : \Gamma \rightarrow f^{-1}(a)$  und  $m_2 : f^{-1}(a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ .

Die erste Abbildung definieren wir als  $m_1(\gamma) := \gamma(\tilde{a})$  für alle  $\gamma \in \Gamma$ . Die Abbildung  $m_1$  ist wegen Korollar 4.10 bijektiv.

Nun müssen wir noch  $m_2(\tilde{b})$  für  $\tilde{b} \in f^{-1}(a)$  einen Sinn geben. Dazu wählen wir einen Weg  $\alpha$  mit Startpunkt  $\tilde{a}$  und Endpunkt  $\tilde{b}$ . Dann ist  $m_2(\tilde{b})$  definiert als  $[f \circ \alpha]$ . Die Abbildung ist wohldefiniert, also insbesondere unabhängig von der Wahl des Weges  $\alpha$ , da im einfach zusammenhängenden Raum  $\tilde{X}$  alle Wege mit denselben Anfangs- und Endpunkten homotop und ihre Bilder unter  $f$  dann ebenfalls homotop sind. Es fehlt noch die Bijektivität der Abbildung  $m_2$ .

Wir zeigen nun zunächst, dass die Abbildung  $m_2$  surjektiv ist. Sei dazu ein Element  $[\omega] \in \pi_1(X, a)$  beliebig. Nach Lemma 4.2 können wir den Weg hochheben. Wir erhalten einen Weg  $\tilde{\omega} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  mit Startpunkt  $\tilde{a}$  und der Eigenschaft  $f \circ \tilde{\omega} = \omega$ . Es gilt  $f(\tilde{\omega}(1)) = \omega(1) = a$  und damit liegt der Endpunkt von  $\tilde{\omega}$  im Urbild  $f^{-1}(a)$  von  $m_2$ . Also ist  $m_2$  surjektiv.

Nun wenden wir uns der Injektivität der Abbildung  $m_2$  zu. Dazu seien  $\tilde{b}$  und  $\tilde{b}'$  mit  $m_2(\tilde{b}) = m_2(\tilde{b}')$  beliebig. Wir wählen zwei Wege  $\omega, \omega' : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ , jeweils mit dem Startpunkt  $\tilde{a}$  und den Endpunkten  $\tilde{b}$  und  $\tilde{b}'$ . Die Wege  $f \circ \omega$  und  $f \circ \omega'$  sind homotop, da  $m_2(\tilde{b})$  und  $m_2(\tilde{b}')$  übereinstimmen. Mit Hilfe von Lemma 4.3 folgern wir, dass auch  $\omega$  und  $\omega'$  homotop sind. Sie haben damit insbesondere denselben Endpunkt, also  $\tilde{b} = \tilde{b}'$ . Wir haben gezeigt, dass  $m_1$  und  $m_2$  bijektiv sind. Damit ist auch ihre Verknüpfung  $m = m_2 \circ m_1$  bijektiv.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch die Gruppenstruktur erhalten bleibt. Im Werk [3] von Freitag wurde das nicht weiter ausgeführt, aber wir können uns das im Folgenden kurz überlegen. Seien  $\gamma, \eta : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  zwei Deckbewegungen. Um  $m(\gamma \circ \eta)$  zu bestimmen, müssen wir zunächst einen Weg von  $\tilde{a}$  nach  $\gamma \circ \eta(\tilde{a})$  wählen. Dazu wählen wir einen Weg  $\omega_1$  mit Startpunkt  $\tilde{a}$  und Endpunkt  $\gamma(\tilde{a})$  und einen weiteren Weg  $\omega_2$  von  $\gamma(\tilde{a})$  nach  $\gamma(\eta(\tilde{a}))$  aus. Das nacheinander Entlanglaufen  $\omega_1 * \omega_2$  der beiden Wege ist ein Weg von  $\tilde{a}$  nach  $\gamma \circ \eta(\tilde{a})$ . Es gilt

$$\begin{aligned} m(\gamma \circ \eta) &= [f(\omega_1 * \omega_2)] \\ &= [f(\omega_1) * f(\omega_2)] \\ &= [f(\omega_1)] * [f(\omega_2)] \end{aligned}$$

und  $[f(\omega_1)] = m(\gamma)$ . Wir müssen also nur noch zeigen, dass auch  $[f(\omega_2)] = m(\eta)$  gilt. Da  $\gamma$  eine Deckbewegung ist, ist auch das Inverse  $\gamma^{-1}$  eine Deckbewegung. Es gilt also  $[f(\omega_2)] = [f(\gamma^{-1}(\omega_2))]$ , wobei  $\gamma^{-1} \circ \omega_2$  ein Weg von  $\tilde{a}$  nach  $\eta(\tilde{a})$  ist. Damit folgt die gewünschte Gleichheit  $[f(\omega_2)] = m(\eta)$ .  $\square$

Mithilfe dieses Satzes können wir auf einfachem Wege Fundamentalgruppen bestimmen. Betrachten wir zum Beispiel die punktierte Ebene  $\mathbb{C}$  mit der universellen Überlagerung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Die Deckbewegungsgruppe dieser Überlagerung ist  $2\pi i \mathbb{Z}$ . Die Fundamentalgruppe der punktierten Ebene ist also isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .

### 4.3 Zusammenführung

Im letzten Unterkapitel haben wir den Quotienten einer Riemannschen Fläche und einer frei operierenden Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen konstruiert. Wir werden nun unser Wissen über Hochhebungen hinzunehmen, mit dem Ziel, dass jede zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  biholomorph zu einem Quotienten  $\tilde{X}/\Gamma$  einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $\tilde{X}$  und einer Gruppe  $\Gamma$  biholomorpher Selbstabbildungen auf dieser Fläche ist.

Dazu müssen wir zunächst die Existenz einer universellen Überlagerung zu jeder zusammenhängenden Riemannschen Fläche zeigen.

**Satz 4.16.** *Jede zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  besitzt eine universelle Überlagerung  $f : \tilde{X} \rightarrow X$ .*

*Beweis.* In der Quelle [3] von Freitag wurde die universelle Überlagerung rein topologisch eingeführt und danach auf die Riemannschen Flächen übertragen. Dazu hat Freitag die Eigenschaft hinreichend zusammenhängend eingeführt.

Ein topologischer Raum  $X$  heißt *hinreichend zusammenhängend*, falls er wegzusammenhängend ist und zusätzlich zu jedem Punkt  $a \in X$  und jeder Umgebung  $U$  um  $a$  eine einfach zusammenhängende Umgebung  $V$  mit  $a \in V \subseteq U$  existiert.

Wir können leicht prüfen, dass Riemannsche Flächen diese Eigenschaft besitzen. Sei dazu  $x \in X$  mit zugehöriger Umgebung  $B \ni x$  beliebig. Dann ist  $x$  in einer offenen Teilmenge  $B'$  von  $B$  enthalten. Wir wählen eine Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  mit  $x \in U$ . Da  $B' \cap U$  offen ist, ist auch das Bild unter  $\varphi$  offen und wir können eine offene  $\varepsilon$ -Umgebung  $V_\varepsilon$  um  $\varphi(x)$  wählen, die im Bild von  $B' \cap U$  enthalten ist. Das Urbild  $\varphi^{-1}(V_\varepsilon)$  ist eine einfach zusammenhängende Umgebung von  $x$ , welche in  $B$  enthalten ist.

Kommen wir nun zur Konstruktion der einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $\tilde{X}$ . Dazu fixieren wir ein Element  $a \in X$ . Sei  $x \in X$  beliebig. Dann betrachten wir die Menge aller Homotopieklassen von stetigen Wegen von  $a$  nach  $x$ , welche wir bereits mit  $\pi_1(X, a, x)$  bezeichnet haben und markieren den Punkt  $x$  mit Elementen  $A \in \pi_1(X, a, x)$  aus dieser Klasse. Wir behaupten, dass wir dem Raum

$$\tilde{X} := \{(x, A) \mid x \in X, A \in \pi_1(X, a, x)\}$$

die Struktur einer Riemannschen Fläche verleihen können, sodass die kanonische Projektion  $f : \tilde{X} \rightarrow X, (x, \varphi) \mapsto x$  eine universelle Überlagerung ist.

Dazu verleihen wir der Menge  $\tilde{X}$  zunächst eine Topologie. Sei  $x_0 \in X$  und  $A$  eine Markierung des Punktes, also  $(x_0, A) \in \tilde{X}$ . Sei außerdem  $U$  eine einfach zusammenhängende offene Umgebung von  $x_0$ . Dann können wir zu jedem Punkt  $x \in U$  eine eindeutige Markierung  $B_x$  finden. Das werden wir kurz erläutern. Wir wählen einen Weg  $\alpha$  von  $a$  nach  $x_0$  mit  $[\alpha] = A$  und einen Weg  $\beta$  von  $x_0$  nach  $x$ , der in  $U$  liegt. Der Weg  $\alpha * \beta$  ist bis auf Homotopie eindeutig, da  $U$  einfach zusammenhängend ist. Für einen anderen, auf diese Weise konstruierten Weg würde

$$[\alpha' * \beta'] = [\alpha' * \beta] = [\alpha * \beta]$$

gelten. Diese Markierung  $B_x := [\alpha * \beta]$  liefert ein eindeutiges Element  $(x, B_x)$  in dem Raum  $\tilde{X}$ . Die Menge

$$W(U, (x_0, A)) := \{(x, B_x) \mid x \in U\}$$

bildet eine Teilmenge von  $\tilde{X}$ , welche durch die kanonische Projektion  $f$  bijektiv auf  $U$  abgebildet wird. Nun können wir offene Mengen definieren. Eine Teilmenge  $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$  ist offen, falls zu allen  $(x_0, A) \in \tilde{U}$  eine einfach zusammenhängende Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $X$  existiert, sodass die Menge  $W(U, (x_0, A))$  in  $\tilde{U}$  enthalten ist.

Nachdem wir eine Topologie auf  $\tilde{X}$  definiert haben, versuchen wir einen Schritt weiter zu gehen, indem wir  $\tilde{X}$  die Struktur einer Riemannschen Fläche verleihen. Sei dazu  $x_0 \in X$  beliebig und  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine Karte, sodass  $x_0$  in  $V$  enthalten ist. Wie bereits oben bewiesen, ist  $X$  hinreichend zusammenhängend. Das heißt wir finden eine Teilmenge  $U \subseteq V$ , sodass  $U$  einfach zusammenhängend ist. Wenn wir das Urbild von  $U$  unter  $f$  betrachten, dann fällt auf, dass wir eine disjunkte

Vereinigung

$$f^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{A \in \pi_1(X, a, x_0)} W(U, (x_0, A)) \quad (4.5)$$

erhalten, wobei jede Zusammenhangskomponente  $W(U, (x_0, A))$  durch  $f$  bijektiv auf  $U$  abgebildet wird. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W(U, (x_0, A)) & \xrightarrow{f} & U \xrightarrow{\text{id}} V \\ & & \downarrow \psi \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

macht deutlich, dass wir zu jedem Punkt  $x_0 \in X$  eine Karte

$$\left( W(U, x_0, A), \psi \circ f|_{W(U, x_0, A)} \right)$$

finden können. In dieser Karte bildet  $f$  die Menge  $W(U, (x_0, A))$  sogar biholomorph auf  $U$  ab. Diese Karten bilden einen Atlas auf  $\tilde{X}$ . Auf den Schnitten sind die Übergangsfunktionen

$$\psi' \circ f|_{W(U, x_0, A)} \circ \left( \psi \circ f|_{W(U, x_0, A)} \right)^{-1} = \psi' \circ \psi^{-1}$$

biholomorph. Dies zeigt uns, dass der konstruierte Atlas dem Raum  $\tilde{X}$  die Struktur einer Riemannschen Fläche verleiht. Die Formel (4.5) zeigt außerdem, dass  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung ist.

Um zu beweisen, dass die Überlagerung eine universelle Überlagerung ist, müssen wir nur noch zeigen, dass die Riemannsche Fläche  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist. Der Raum  $\tilde{X}$  ist zusammenhängend, da ein Weg in  $\tilde{X}$  existiert, der  $(a, [c_a])$  und einen beliebigen anderen Punkt  $(x, [\gamma])$  miteinander verbindet. Hierbei sei  $c_a$  der konstante Weg in  $a$ . Wir finden den Verbindungsweg, indem wir eine Schar von Wegen  $\gamma'_s(\_) := \gamma(s \cdot \_)$  definieren. Der Weg  $\eta(s) := (\gamma(s), [\gamma'_s])$  in  $\tilde{X}$  verbindet die beiden Punkte wie gewünscht. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Fundamentalgruppe trivial ist. Sei dazu  $\tilde{\alpha}$  eine Schleife in  $\tilde{X}$ , wobei die erste Komponente  $\alpha := f \circ \tilde{\alpha}$  der Projektion der Schleife entspricht. Wir können wegen Proposition 2.11 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Schleife den Anfangs- und Endpunkt  $(a, [c_a])$  hat. Wir zeigen nun, dass  $[\beta_t]$  mit

$$\beta_t := \alpha(\_ \cdot t)$$

eine zugehörige Markierung zu  $\alpha(t)$  ist. Für  $t = 0$  ist das klar. Wir betrachten das Supremum  $t_0$  über alle  $t'$  mit der Eigenschaft, dass  $[\beta_t]$  die Markierung von  $\alpha(t)$  für alle  $t \leq t'$  ist. Wir wollen zeigen, dass  $t_0 = 1$  gilt. Angenommen es ist  $t_0 < 1$ . Wir betrachten eine Zerlegung der Umgebung  $U(\alpha(t_0))$  von  $\alpha(t_0)$  wie bereits in (4.5) konstruiert. Dann existiert aber ein  $t_1 \in [0, t_0]$  mit der Eigenschaft, dass  $\alpha([t_1, t_0])$  in  $U(\alpha(t_0))$  enthalten ist. Da  $\tilde{\alpha}$  stetig ist, muss  $\tilde{\alpha}([t_1, t_0])$  in einer

der Zusammenhangskomponenten  $W(U, \alpha(t_0), A_0)$  enthalten sein. Weil wir Wege und Homotopien eindeutig hochheben können, ist die Markierung  $[\beta_t]$  auf einer Umgebung von  $t_0$  die einzige mögliche Markierung des Weges  $\alpha$ . Es gilt also auch  $\tilde{\alpha}(t) = (\alpha(t), [\beta_t])$  für alle  $t \leq t_0 + \varepsilon$ , was im Widerspruch zur Annahme steht. Dieselbe Argumentation können wir benutzen, um zu zeigen, dass  $[\beta_{t_0}]$  die Markierung von  $\alpha(t_0)$  ist. Da der Anfangs- und der Endpunkt der Schleife  $\tilde{\alpha}$  übereinstimmen, gilt  $[c_a] = [\beta_1]$ , wobei der Weg  $\beta_1$  gleich  $\alpha$  ist. Entsprechend Lemma 4.3 können wir die Homotopie hochheben und erhalten, dass der konstante Weg  $(a, [c_a])$  und der Weg  $\tilde{\alpha}$  in  $\tilde{X}$  homotop sind. Da  $\tilde{\alpha}$  aber beliebig war, können wir folgern, dass  $\pi_1(\tilde{X}, (a, [c_a]))$  trivial ist. Also ist  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend.  $\square$

Nachdem der letzte Beweis sehr konstruktiv war, müssen wir nun hauptsächlich die bereits gemachten Aussagen zusammentragen.

**Satz 4.17.** *Sei  $X$  eine zusammenhängende Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $\tilde{X}$  und eine frei operierende Gruppe  $\Gamma$  biholomorpher Selbstabbildungen auf  $\tilde{X}$ , sodass  $X$  und  $\tilde{X}/\Gamma$  biholomorph äquivalent sind, also eine biholomorphe Abbildung zwischen den beiden Riemannschen Flächen existiert.*

*Beweis.* Soeben in Satz 4.16 haben wir gesehen, dass jede zusammenhängende Riemannsche Fläche eine universelle Überlagerung  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  besitzt. Weiterhin folgt aus Satz 4.15, dass die Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, a)$  entspricht. Wegen Proposition 4.12 operiert die Deckbewegungsgruppe auf  $\tilde{X}$  frei. Außerdem sieht man sofort an der Definition der Deckbewegungsgruppe, dass sie eine Teilmenge der biholomorphen Selbstabbildungen auf  $\tilde{X}$  ist. Indem wir Proposition 4.14 anwenden wird klar, dass wir den Quotienten  $\tilde{X}/\pi_1(X, a)$  bilden können und eine unverzweigte galois'sche Überlagerung

$$p : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\pi_1(X, a)$$

mit Deckbewegungsgruppe  $\pi_1(X, a)$  erhalten.

Nun müssen wir noch folgern, dass  $X$  und  $\tilde{X}/\pi_1(X, a)$  biholomorph äquivalent sind. Sowohl  $f$  als auch  $p$  sind lokal biholomorph. Daher können wir die Umkehrabbildungen  $f^{-1}$  und  $p^{-1}$  lokal angeben. Wir wollen jedoch zeigen, dass die Abbildungen  $p \circ f^{-1}$  und  $f \circ p^{-1}$  sogar global wohldefiniert sind, es also irrelevant ist, für welches Element aus der Faser von  $f$  beziehungsweise  $p$  wir uns entscheiden. Seien nämlich  $(x, A)$  und  $(x, B)$  zwei Urbilder von  $x$  unter  $f$ , so ist das Bild unter  $p$  gleich, da  $(x, A)$  in derselben Äquivalenzklasse liegt wie  $(x, (B * A^{-1}) * A) = (x, B)$ . Seien umgekehrt  $(x, A)$  und  $(x, B)$  zwei Elemente aus der Faser von  $p$  über  $[(x, A)]$ , so gilt  $f((x, A)) = x = f((x, B))$ . Die Abbildung  $g \circ f^{-1}$  ist somit bijektiv und lokal biholomorph, also global biholomorph.  $\square$

Wir werden in der folgenden Proposition sehen, dass das Paar  $(\tilde{X}, \Gamma)$  aus Satz 4.17 im wesentlichen eindeutig bestimmt ist.

**Proposition 4.18.** *Sei  $X$  eine zusammenhängende Riemannsche Fläche. Seien  $\tilde{X}$  und  $\tilde{X}'$  zwei einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen und seien außerdem  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei frei operierende Gruppen biholomorpher Selbstabbildungen*

auf  $X$ , sodass  $\tilde{X}/\Gamma$ ,  $\tilde{X}'/\Gamma'$  und  $X$  biholomorph äquivalent sind. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung  $\varphi : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$  mit der Eigenschaft  $\Gamma' = \varphi^{-1} \circ \Gamma \circ \varphi$ .

*Beweis.* Sei  $p_\Gamma : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\Gamma$  die kanonische Projektion und  $\pi_\Gamma : \tilde{X}/\Gamma \rightarrow X$  die biholomorphe Abbildung zwischen  $\tilde{X}/\Gamma$  und  $X$ . Dann ist  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung. Analog finden wir die universelle Überlagerung  $g : \tilde{X}' \rightarrow X$  durch Komposition der kanonischen Projektion  $p_{\Gamma'}$  und der biholomorphen Abbildung  $\pi_{\Gamma'}$  zwischen  $\tilde{X}'/\Gamma'$  und  $X$ . Wir wählen zwei Punkte  $a \in \tilde{X}$  und  $b \in \tilde{X}'$  mit  $f(a) = g(b)$ . Dann können wir gemäß Satz 4.5 die Abbildungen  $f$  und  $g$  eindeutig hochheben

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X}' & \\ \varphi \swarrow & & \searrow g \\ \tilde{X} & \xrightarrow{f} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \varphi' \swarrow & & \searrow f \\ \tilde{X}' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

mit der Eigenschaft, dass  $\varphi(a) = b$  und  $\varphi'(b) = a$  ist. Wir wissen, dass  $\varphi' \circ \varphi$  eine Hochhebung von  $f$  mit der Eigenschaft  $f \circ \varphi' \circ \varphi = f$  und  $\varphi' \circ \varphi(a) = a$  ist. Die Identität ist eine weitere Hochhebung mit dieser Eigenschaft. Das bedeutet aber, dass  $\varphi' \circ \varphi$  gleich der Identität sein muss. Die Abbildung  $\varphi'$  ist also das inverse Element zu  $\varphi$ . Damit ist  $\varphi$  eine biholomorphe Abbildung.

Für ein beliebiges Element  $\alpha$  aus der Deckbewegungsgruppe  $\Gamma'$  gilt außerdem

$$f \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi) = g \circ \alpha \circ \varphi = g \circ \varphi = f$$

und damit ist  $\varphi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi$  ein Element aus der Deckbewegungsgruppe  $\Gamma$ . Analog gilt natürlich auch  $\Gamma' \supseteq \varphi \circ \Gamma \circ \varphi^{-1}$  und damit die Gleichheit  $\varphi^{-1} \circ \Gamma' \circ \varphi = \Gamma$ . Die Gruppenstruktur überträgt sich ebenfalls, wie an der Gleichung

$$(\varphi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \beta \circ \varphi) = \varphi^{-1} \circ (\alpha \circ \beta) \circ \varphi$$

deutlich wird. □

Wir wollen in der folgenden Bemerkung einen Spezialfall der Eindeutigkeitsaussage gesondert hervorheben. In der Quelle [3] von Freitag wurde kein Beweis dazu angegeben, da er im Wesentlichen durch das Zusammentragen der bereits bewiesenen Sätze zustande kommt.

**Bemerkung 4.19.** Sei  $X$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und seien  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei frei operierende Gruppen biholomorpher Selbstabbildungen auf  $X$ . Die Riemannschen Flächen  $X/\Gamma$  und  $X/\Gamma'$  sind biholomorph äquivalent genau dann, wenn die Gruppen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  als Untergruppen der Gruppe aller biholomorphen Selbstabbildungen auf  $X$  zueinander konjugiert sind.

*Beweis.* Wir betrachten die Überlagerung  $X \rightarrow X/\Gamma$ . Wenn die beiden Quotienten  $X/\Gamma$  und  $X/\Gamma'$  biholomorph äquivalent sind, so folgt direkt aus der Proposition 4.18, dass die beiden Gruppen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zueinander konjugiert sind.

Wenn anders herum die Gruppen  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zueinander konjugiert sind, also wenn  $\Gamma = \varphi^{-1} \circ \Gamma' \circ \varphi$  für eine biholomorphe Abbildung  $\varphi : X \rightarrow X$  gilt, so können

wir die Abbildung

$$\begin{aligned}\alpha : X/\Gamma &\longrightarrow X/\Gamma' \\ [x]_\Gamma &\longmapsto [\varphi(x)]_{\Gamma'}\end{aligned}$$

definieren und zeigen, dass diese biholomorph ist. Wir wollen zunächst die Wohldefiniertheit zeigen. Seien dazu zwei Punkte  $x$  und  $\tilde{x}$  aus  $X$  mit  $[x]_\Gamma = [\tilde{x}]_\Gamma$  beliebig. Dann finden wir eine Selbstabbildung  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\tilde{x} = \gamma(x)$ . Wir wissen aber bereits, dass  $\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1} =: \gamma'$  in  $\Gamma'$  ist. Das bedeutet, dass wir

$$\alpha([\tilde{x}]_\Gamma) = [\varphi(\tilde{x})]_{\Gamma'} = [\varphi(\gamma(x))]_{\Gamma'} = [\gamma'(\varphi(x))]_{\Gamma'} = [\varphi(x)]_{\Gamma'} = \alpha([x]_\Gamma)$$

folgern können, was direkt die Wohldefiniertheit von  $\alpha$  liefert. Analog zeigt man, dass die Umkehrabbildung  $[x]_{\Gamma'} \mapsto [\varphi^{-1}(x)]_\Gamma$  ebenfalls wohldefiniert ist.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Abbildung holomorph ist. Sei dazu  $[x] \in X/\Gamma$  beliebig. Zu der Überlagerung  $p_\Gamma : X \rightarrow X/\Gamma$  können wir ähnlich wie in (4.3) eine Umgebung  $U$  um  $x$  finden, sodass das Urbild

$$p_\Gamma^{-1}([U]) = \dot{\bigcup}_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U)$$

eine disjunkte Vereinigung und die Einschränkung  $p_\Gamma|_U$  biholomorph ist. Die Abbildung  $\alpha$  lässt sich in  $U$  darstellen als  $\alpha|_U = p_{\Gamma'} \circ \varphi \circ p_\Gamma|_U^{-1}$ . Somit ist  $\alpha$  holomorph in  $[x]$ .  $\square$

## 5 Der Uniformisierungssatz und weitere Kategorisierung

Wir haben gesehen, wie wir die Fundamentalgruppe einer Riemannschen Fläche  $X$  bestimmen können, wenn wir die universelle Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$  kennen. Wir stellen uns nun die Frage, was die universelle Überlagerung der punktierten Ebene  $\mathbb{C}^*$  ist.

### 5.1 Der Uniformisierungssatz

Wir wissen bereits, dass jede zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  eine universelle Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$  besitzt, wobei der Raum  $\tilde{X}$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist. Um die universelle Überlagerung von  $\mathbb{C}^*$  zu finden, müssen wir also zunächst heraus finden, welche einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen es überhaupt gibt. Dazu betrachten wir das folgende

**Theorem 5.1 (Uniformisierungssatz).** *Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist biholomorph äquivalent zu genau einer der Riemannschen Flächen  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{P}$ .*

Wir werden dieses Theorem ohne Beweis hinnehmen und uns viel mehr für die Konsequenzen interessieren, welche sich für die universellen Überlagerungen ergeben. Man findet den Beweis aber beispielsweise in Kapitel III.1 der Quelle [3] von Freitag.

Wir können uns trotzdem kurz überlegen, dass die drei Riemannschen Flächen nicht untereinander biholomorph äquivalent sein können, da der projektive Raum  $\mathbb{P}$  im Gegensatz zur offenen Kreisscheibe  $\mathbb{E}$  und der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  kompakt ist und da jede holomorphe Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{E}$  entsprechend dem Satz von Liouville konstant ist. Wir wissen, dass  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängend sind, da sie sternförmig sind. Auch die Riemannsche Fläche  $\mathbb{P}$  ist einfach zusammenhängend. Dies haben wir in Proposition 2.14 bewiesen.

Durch einfaches Zusammentragen der bereits bewiesenen Sätze folgt

**Proposition 5.2.** *Jede zusammenhängende Riemannsche Fläche ist biholomorph äquivalent zu einem Quotienten der Riemannschen Flächen  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{P}$  und einer frei operierenden Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen auf dieser Fläche.*

*Beweis.* Bereits in Satz 4.17 haben wir gesehen, dass jede zusammenhängende Riemannsche Fläche biholomorph äquivalent zu  $\tilde{X}/\Gamma$  ist. Dabei ist  $\tilde{X}$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche und  $\Gamma$  eine frei operierende Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen auf dieser Fläche. Entsprechend dem Uniformisierungssatz können wir annehmen, dass die einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche entweder  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{P}$  ist.  $\square$

Da die Projektion auf den Quotienten eine Überlagerung ist, wie wir in Proposition 4.14 gesehen haben, können wir ohne große Anstrengung das folgende Korollar beweisen.

**Korollar 5.3.** *Jede zusammenhängende Riemannsche Fläche wird von  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{P}$  universell überlagert.*

*Beweis.* Die Proposition 5.2 besagt, dass jede zusammenhängende Riemannsche Fläche biholomorph zu einem Quotienten von  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{P}$  und einer frei operierenden Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen auf dieser Fläche ist. Bereits in Proposition 4.14 haben wir gesehen, dass die Projektion auf einen solchen Quotienten eine Überlagerung ist. Da außerdem die Riemannschen Flächen  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{P}$  einfach zusammenhängend sind, ist die Überlagerung universell.  $\square$

Im Folgenden wollen wir die Quotienten weiter untersuchen, indem wir die möglichen Kandidaten für frei operierende Gruppen biholomorpher Selbstabbildungen in Bezug auf die jeweilige Riemannsche Fläche bestimmen.

## 5.2 Die Ebene $\mathbb{C}$ als universelle Überlagerung

Wir betrachten zunächst die einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 5.4.** *Jede biholomorphe Selbstabbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist affin, erfüllt also die Gleichung*

$$f(z) = az + b$$

*für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Hierbei seien  $a \neq 0$  und  $b$  Elemente aus  $\mathbb{C}$ .*

Auch wenn dieser Sachverhalt bereits aus der Funktionentheorie bekannt ist, werden wir den Beweis noch einmal kurz zusammen ausarbeiten. Als Quelle dient hierfür zum Beispiel [2], Kapitel III. Anhang zu §4 und §5, Aufgabe 5.

*Beweis.* Da die Selbstabbildung  $f$  keine Polstelle besitzt, gilt  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ . Wir wissen, dass das Bild von der offenen Einheitskreisscheibe  $\mathbb{E}$  unter  $f$  eine offene Menge in  $\mathbb{C}$  ist. Wir zeigen, dass  $f$  ein Polynom ist. Andernfalls hätte  $f(1/z)$  eine wesentliche Singularität in 0. Damit wäre  $f(\mathbb{C} - \mathbb{E})$  nach dem Satz von Casorati-Weierstraß dicht in  $\mathbb{C}$  und  $f$  nicht bijektiv. Wegen der Injektivität der Abbildung  $f$  muss das Polynom außerdem vom Grad 1 sein. Damit ergibt sich die obige Formel  $f(z) = az + b$  mit  $a \neq 0$ .  $\square$

Die soeben konstruierte Gruppe aller biholomorpher Selbstabbildungen auf  $\mathbb{C}$  operiert nicht frei. Daher müssen wir geeignete Untergruppen suchen.

**Proposition 5.5.** *Wir betrachten die Gruppe  $\{f \mid f(z) = az + b, a \neq 0\}$ . Die einzigen frei operierenden Untergruppen sind*

$$\Gamma_L = \{f \mid f(z) = z + b, b \in L\},$$

*wobei  $L$  eine diskrete Untergruppe von  $\mathbb{C}$  ist.*

*Beweis.* Wäre  $a \neq 1$ , dann hätte  $f$  einen Fixpunkt. Diesen würde man sofort erhalten, indem man die Gleichung  $az + b = z$  nach  $z$  auflöst. Eine frei operierende Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen auf  $\mathbb{C}$  besteht also nur aus Translationen

$z \mapsto z + b$ , wobei die Menge der auftretenden  $b$  eine Untergruppe  $L$  von  $\mathbb{C}$  sein muss.

Wenn wir nun wollen, dass  $\Gamma_L$  frei operiert, dann muss die Menge  $L$  diskret sein. Angenommen  $L$  ist nicht diskret, dann hat  $L$  einen Häufungspunkt  $l_0 \in L$ . Seien  $U \ni l_0$  und  $V \ni 0$  zwei beliebige offene Mengen, so existiert ein  $l \in L - \{l_0\}$ , sodass  $l$  in  $U$  liegt. Der Schnitt  $U \cap (V + l)$  ist nicht-leer. Die zweite Eigenschaft der Definition 4.11 einer frei operierenden Gruppe ist also nicht erfüllt.

Wir untersuchen nun zunächst die diskreten Untergruppen der Ebene  $\mathbb{C}$ . Es gibt drei Typen von diskreten Untergruppen der komplexen Zahlenebene:

1.  $L_1 = \{0\}$  (triviale Gruppe)
2.  $L_2 = a\mathbb{Z}$  mit  $a \neq 0$  (zyklische Gruppe)
3.  $L_3 = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$  mit  $a$  und  $b$   $\mathbb{R}$ -linear unabhängigen Punkten (Gitter)

Es ist klar, dass alle drei Gruppen diskret sind. Die Zusatzbedingungen  $a \neq 0$  und die lineare Unabhängigkeit von  $a$  und  $b$  in Fall 2 und 3 grenzen die Fälle klar von den jeweils vorherigen ab. Wir zeigen noch, dass dies alle diskreten Untergruppen von  $\mathbb{C}$  sind. Nehmen wir zur Gruppe  $L_2$  oder  $L_3$  noch einen weiteren  $\mathbb{R}$ -linear abhängigen Erzeuger  $c \in \mathbb{C}$  dazu, so erhalten wir entweder eine Gruppe von demselben Typ oder die Gruppe ist nicht mehr diskret, weil dann  $c\mathbb{Z}$  einen Häufungspunkt in  $\mathbb{C}/L_i$  hat. Man sieht leicht, dass die drei Gruppen  $\Gamma_{L_i}$  frei operieren. □

Der Satz 4.17 über die biholomorphe Äquivalenz zwischen der Riemannschen Fläche und einem Quotienten führt uns zu dem folgenden

**Satz 5.6.** *Jede Riemannsche Fläche, die von der Ebene  $\mathbb{C}$  universell überlagert wird, ist biholomorph äquivalent zu einer der drei folgenden Riemannschen Flächen:*

1.  $\mathbb{C}/L_1 = \mathbb{C}$  (die Ebene selbst)
2.  $\mathbb{C}/L_2 = \mathbb{C}^*$  (die punktierte Ebene)
3.  $\mathbb{C}/L_3$  (ein Torus)

*Beweis.* Da die Riemannsche Fläche von  $\mathbb{C}$  überlagert wird, ist sie insbesondere zusammenhängend. Wie in Satz 4.17 finden wir einen Quotienten, welcher biholomorph zu der Riemannschen Fläche ist. In Frage kommen nur die Quotienten bestehend aus der Ebene  $\mathbb{C}$  und den bereits in Proposition 5.5 bestimmten Untergruppen  $L_i$ . Wir merken noch an, dass sich die Gleichheit von  $\mathbb{C}/L_2$  und  $\mathbb{C}^*$  im zweiten Fall durch die Abbildung  $z \mapsto \exp\left(2\pi i \frac{z}{a}\right)$  ergibt. □

### 5.3 Die Zahlenkugel $\mathbb{P}$ als universelle Überlagerung

Zunächst wollen wir wieder die biholomorphen Selbstabbildungen auf dem projektiven Raum  $\mathbb{P}$  bestimmen, um später die frei operierenden Untergruppen zu identifizieren und die Quotienten bilden zu können.

Wie bereits aus der Funktionentheorie bekannt ist, sind die biholomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}$  genau die Möbiustransformationen, also alle

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C}).$$

Im Folgenden werden wir auch dazu wieder einen kurzen Beweis geben. Das grundlegende Konzept dazu findet man zum Beispiel in [2], Kapitel III. Anhang zu §4 und §5, Aufg. 7.

**Proposition 5.7.** *Jede biholomorphe Selbstabbildung auf  $\mathbb{P}$  ist eine Möbiustransformation.*

*Beweis.* Sei  $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  eine biholomorphe Selbstabbildung. Dabei fassen wir  $\mathbb{P}$  als  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  auf. Wir wollen eine Abbildung konstruieren, die sich ähnlich wie  $f$  verhält, aber eine Selbstabbildung auf  $\mathbb{C}$  ist. Sei dazu  $y := f(\infty)$  der Punkt, auf den  $\infty$  geschickt wird.

Im ersten Fall ist  $y \neq \infty$ . Hier können wir die Abbildung  $g(z) := \frac{1}{z-y}$  definieren. Sie ist eine biholomorphe Selbstabbildung auf  $\mathbb{P}$  und bildet den Punkt  $y$  auf den Punkt  $\infty$  ab. Wir erhalten durch die Verknüpfung der beiden Abbildungen wieder eine biholomorphe Abbildung  $g \circ f = \frac{1}{f-y} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ , welche den Punkt  $\infty$  fixiert. Also ist diese Verknüpfung eine biholomorphe Selbstabbildung von  $\mathbb{C}$ .

Bereits in Proposition 5.4 haben wir gezeigt, dass alle biholomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{C}$  von der Form  $z \mapsto az + b$  mit  $a \neq 0$  sind. Es existieren also  $a \neq 0$  und  $b$ , sodass  $g \circ f = az + b$  gilt. Durch einfache Umformungen erhalten wir eine explizite Darstellung

$$f(z) = \frac{yaz + (yb + 1)}{az + b}$$

für die Abbildung  $f$ . Wir haben damit gezeigt, dass  $f$  die Form einer Möbiustransformation besitzt, da weiterhin die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} ya & yb + 1 \\ a & b \end{pmatrix} = -a$$

ungleich 0 ist.

Im zweiten Fall ist  $y = \infty$ . Hier ist  $f$  bereits eine Abbildung, die den Punkt  $\infty$  fixiert und verhält sich daher wie eine Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ . Wie schon im ersten Fall können wir Proposition 5.4 anwenden. Die Abbildung  $f$  ist also der Form  $f(z) = az + b$  mit  $a \neq 0$ . Dies ist eine Möbiustransformation, da die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a$$

wie auch im ersten Fall ungleich 0 ist. □

Nun wollen wir wieder die frei operierenden Untergruppen der Gruppe der biholomorphen Selbstabbildungen bestimmen. Dafür bleiben aber nicht viele Möglichkeiten.

**Proposition 5.8.** *Die einzige Gruppe biholomorphe Selbstabbildungen, die auf  $\mathbb{P}$  frei operiert, ist die triviale Gruppe, welche nur die Identität enthält.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass jede beliebige Möbiustransformation

$$z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mindestens einen Fixpunkt besitzt. Durch Umstellen der Gleichung  $z = \frac{az+b}{cz+d}$  sieht man sofort, dass die Lösung von

$$0 = cz^2 + (d - a)z - b$$

immer ein Fixpunkt der Möbiustransformation ist. Im Fall  $c \neq 0$  zerfällt das Polynom über  $\mathbb{C}$  in zwei Linearfaktoren und wir erhalten eine Nullstelle, also einen Fixpunkt. Im Fall  $c = 0$  muss die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad$$

ungleich 0 sein. Das bedeutet insbesondere, dass  $a$  und  $d$  ungleich 0 sind. Die Abbildung  $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  hat also einen Fixpunkt bei  $\infty$ . Damit haben wir gezeigt, dass jede Möbiustransformation einen Fixpunkt besitzt. In einer frei operierenden Gruppe darf aber nur die Identität einen Fixpunkt aufweisen. Daher enthält die einzige frei operierende Gruppe auf  $\mathbb{P}$  nur die Identität.  $\square$

Analog zum Satz 5.6 über die Kategorisierung der Riemannschen Flächen mit der komplexen Ebene als Überlagerung erhalten wir den folgenden

**Satz 5.9.** *Jede Riemannsche Fläche, welche von dem projektiven Raum  $\mathbb{P}$  universell überlagert wird, ist auch biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{P}$ .*

Bis auf Holomorphie ist damit der projektive Raum  $\mathbb{P}$  die einzige Riemannsche Fläche, deren universelle Überlagerung kompakt ist.

## 6 Eine Anwendung – der kleine Satz von Picard

Mit dem bis hierher erarbeiteten Wissen ist es uns möglich, den *kleinen Satz von Picard* zu beweisen. Wir orientieren uns dazu an der Quelle [3], Kapitel III.2.

Aus dem Satz von Casorati-Weierstraß (z.B. [2], Kapitel III. §4) folgt direkt, dass das Bild  $f(\mathbb{C})$  einer nicht-konstanten, holomorphen Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dicht in  $\mathbb{C}$  liegt. Dies wollen wir kurz begründen. Da  $f$  holomorph ist, können wir eine Potenzreihenentwicklung angeben. Wenn diese Entwicklung nur endlich viele Summanden umfasst, so ist  $f$  ein Polynom. Da jedes nicht-konstante Polynom über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren zerfällt, nimmt es jeden Wert in  $\mathbb{C}$  an. Wenn die Potenzreihenentwicklung nicht endlich ist, so hat  $f(\frac{1}{z})$  eine wesentliche Polstelle in 0 und wir können den Satz von Casorati-Weierstraß anwenden.

Wir werden nun zeigen, dass  $f$  dabei sogar nur höchstens einen Punkt auslässt. Dazu formulieren wir zunächst das folgende

**Theorem 6.1 (Der kleine Satz von Picard).** *Jede holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0, 1\}$  ist konstant.*

*Beweis.* Wie wir in Proposition 5.2 gezeigt haben, ist  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  biholomorph äquivalent zu einem Quotienten von  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{P}$  und einer frei operierenden Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen.

Angenommen die Riemannsche Fläche  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  ist biholomorph äquivalent zu einem Quotienten von  $\mathbb{P}$ , dann muss sie entsprechend Satz 5.9 auch biholomorph äquivalent zum projektiven Raum selbst sein. Damit ist  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  kompakt, was uns zum Widerspruch führt, da die Überdeckung

$$\mathbb{C} - \{0, 1\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} B_n(0) - \{0, 1\}$$

keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Nehmen wir nun an, dass die Riemannsche Fläche  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  biholomorph zu einem Quotienten von  $\mathbb{C}$  ist. In Satz 5.6 haben wir bereits gezeigt, dass sich dann nur drei mögliche Kandidaten ergeben. Der Quotient kann nur die Ebene  $\mathbb{C}$  selbst, die punktierte Ebene  $\mathbb{C}^*$  oder der Torus sein. Für den Torus verhält es sich ähnlich wie bei dem projektiven Raum. Er ist kompakt und daher nicht biholomorph äquivalent zu  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ . Die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  ist einfach zusammenhängend und kommt damit ebenfalls nicht in Frage.

Nicht sofort klar ist, ob die punktierte Ebene  $\mathbb{C}^*$  und  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  biholomorph äquivalent sind. Wir können dies aber durch einen einfachen Vergleich der Fundamentalgruppen nachprüfen. Vereinfacht gesagt ist die Fundamentalgruppe der punktierten Ebene zyklisch und die Fundamentalgruppe der zweifach punktierten Ebene  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  nicht, da wir durch mehrfaches Umlaufen des einen Punktes keinen Weg erhalten können, der den anderen Punkt umläuft. Mithilfe von topologischem Wissen, wie es zum Beispiel aus [4] bekannt ist, können wir die Fundamentalgruppen auch explizit bestimmen. Während die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{C}^*$  gleich  $\mathbb{Z}$  ist, erhalten wir für die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  nach dem Satz von Seifert und van Kampen ([4], Kapitel 7.2) das freie Produkt  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

Die Fundamentalgruppen sind nicht gleich. Daher können die punktierte und die zweifach punktierte Ebene auch nicht biholomorph äquivalent sein.

Da alle anderen Möglichkeiten erschöpft sind, muss die zweifach punktierte Ebene  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  biholomorph zur einem Quotienten  $\mathbb{E}/\Gamma$  der offenen Einheitskreisscheibe und einer frei operierenden Gruppe biholomorpher Selbstabbildungen sein. An dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{E} \\
 & & & \dashrightarrow & \downarrow \pi \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} - \{0, 1\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{E}/\Gamma \\
 & \searrow & \xrightarrow{g \circ f} & & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

mit der universellen Überlagerung  $\pi$  sehen wir, dass wir die Abbildung  $g \circ f$  wie in Satz 4.5 zu  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$  mit  $\pi \circ h = g \circ f$  hochheben können. Die Hochhebung  $h$  ist eine holomorphe, beschränkte Abbildung auf  $\mathbb{C}$ . Nach dem Satz von Liouville (z.B. [6], Satz 3.39) ist die Abbildung  $h$  konstant. Das bedeutet, dass auch die Verknüpfungen  $g \circ f$  und  $f = g^{-1} \circ g \circ f$  konstant sind. Damit ist der kleine Satz von Picard bewiesen.  $\square$

**Bemerkung 6.2.** Insbesondere haben wir damit gezeigt, dass jede holomorphe Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  konstant ist, sobald sie mindestens zwei Punkte auslässt.

## Literatur

- [1] Baum, Helga: *Kapitel 12, Einführung in die Funktionentheorie*. Nach Vorlesungen im Wintersemester 2002 (2. Teil von Analysis III) und im Sommersemester 2008 (2. Teil von Analysis IIIb) an der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin 2008.  
(<http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Skript/FT-SS08.pdf>)
- [2] Freitag, Eberhard; Busam, Rolf: *Funktionentheorie 1*. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2006.
- [3] Freitag, Eberhard: *Funktionentheorie 2: Riemann'sche Flächen, Mehrere komplexe Variable, Abel'sche Funktionen, höhere Modulformen*. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2014
- [4] Laures, Gerd; Szymik, Markus: *Grundkurs Topologie*. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2015.
- [5] Möller, Martin: *Riemannsche Flächen*. Skript zur Vorlesung an der Goethe-Universität Frankfurt am Main im Wintersemester 2013/2014, Frankfurt am Main 2014.  
(<https://www.uni-frankfurt.de/50581576/riemannflaechen.pdf>)
- [6] Salamon, Dietmar A.: *Funktionentheorie*. Springer Basel AG, Basel 2012.

# Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt und alle Stellen, die ich wörtlich oder annähernd wörtlich aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe. Ich habe mich keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient. Die Arbeit hat in dieser oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Essen, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Unterschrift